# Cours et Exercices

2015/2016

**Première année du cycle du Baccalauréat international section - sciences expérimentales**

BIOF

Préparé par AZIZ AFAADAS Professeur d'enseignement secondaire qualifiant au lycée OUED SAKIA EL HAMRA

ES - SMARA

## Sommaire

*Chapitre 1*

# La logique

## 1. Logique

### 1.1. Assertions ( Propositions )

Une ***assertion*** est une phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en même temps.
Exemples :
- « *Il pleut.* »
- « *Je suis plus grand que toi.* »
- « $2+2=4$ »
- « $2\times 3=7$ »
- « *Pour tout* $x\in\mathbb{R}$*, on a* $x^2\geqslant 0$. »

Si $P$ est une assertion et $Q$ est une autre assertion, nous allons définir de nouvelles assertions construites à partir de $P$ et de $Q$.

#### L'opérateur logique « *et* »

L'assertion « $P$ **et** $Q$ » est vraie si $P$ est vraie et $Q$ est vraie. L'assertion « $P$ *et* $Q$ » est fausse sinon.
On résume ceci en une ***table de vérité*** :

| $P\setminus Q$ | V | F |
|---|---|---|
| V | V | F |
| F | F | F |

FIGURE 1 – Table de vérité de « $P$ *et* $Q$ »

Par exemple si $P$ est l'assertion « *Cette carte est un as* » et $Q$ l'assertion « *Cette carte est cœur* » alors l'assertion « $P$ *et* $Q$ » est vraie si la carte est l'as de cœur et est fausse pour toute autre carte.

#### L'opérateur logique « *ou* »

L'assertion « $P$ **ou** $Q$ » est vraie si l'une des deux assertions $P$ ou $Q$ est vraie. L'assertion « $P$ *ou* $Q$ » est fausse si les deux assertions $P$ et $Q$ sont fausses.
On reprend ceci dans la table de vérité :

| $P\setminus Q$ | V | F |
|---|---|---|
| V | V | V |
| F | V | F |

FIGURE 2 – Table de vérité de « $P$ *ou* $Q$ »

Si $P$ est l'assertion « *Cette carte est un as* » et $Q$ l'assertion « *Cette carte est cœur* » alors l'assertion « $P$ *ou* $Q$ » est vraie si la carte est un as ou bien un cœur (en particulier elle est vraie pour l'as de cœur).

**Remarque**

Pour définir les opérateurs « *ou* », « *et* » on fait appel à une phrase en français utilisant les mots *ou*, *et* ! Les tables de vérités permettent d'éviter ce problème.

## La négation « *non* »

L'assertion « **non** $P$ » est vraie si $P$ est fausse, et fausse si $P$ est vraie.

| $P$ | V | F |
|---|---|---|
| non $P$ | F | V |

FIGURE 3 – Table de vérité de « *non* $P$ »

## L'implication $\Longrightarrow$

La définition mathématique est la suivante :

$$\boxed{\text{L'assertion « }(non\ P)\ ou\ Q\text{ » est notée « }P \Longrightarrow Q\text{ ».}}$$

Sa table de vérité est donc la suivante :

| $P \setminus Q$ | V | F |
|---|---|---|
| V | V | F |
| F | V | V |

FIGURE 4 – Table de vérité de « $P \Longrightarrow Q$ »

L'assertion « $P \Longrightarrow Q$ » se lit en français « $P$ *implique* $Q$ ».
Elle se lit souvent aussi « *si* $P$ *est vraie alors* $Q$ *est vraie* » ou « *si* $P$ *alors* $Q$ ».
Par exemple :

- « $0 \leqslant x \leqslant 25 \Longrightarrow \sqrt{x} \leqslant 5$ » est vraie (prendre la racine carrée).
- « $x \in ]-\infty, -4[ \Longrightarrow x^2 + 3x - 4 > 0$ » est vraie (étudier le binôme).
- « $\sin(\theta) = 0 \Longrightarrow \theta = 0$ » est fausse (regarder pour $\theta = 2\pi$ par exemple).
- « $2 + 2 = 5 \Longrightarrow \sqrt{2} = 2$ » est vraie ! Eh oui, si $P$ est fausse alors l'assertion « $P \Longrightarrow Q$ » est toujours vraie.

## L'équivalence $\Longleftrightarrow$

L'***équivalence*** est définie par :

$$\boxed{\text{« }P \Longleftrightarrow Q\text{ » est l'assertion « }(P \Longrightarrow Q)\ et\ (Q \Longrightarrow P)\text{ ».}}$$

On dira « $P$ *est équivalent à* $Q$ » ou « $P$ *équivaut à* $Q$ » ou « $P$ *si et seulement si* $Q$ ». Cette assertion est vraie lorsque $P$ et $Q$ sont vraies ou lorsque $P$ et $Q$ sont fausses. La table de vérité est :

| $P \setminus Q$ | V | F |
|---|---|---|
| V | V | F |
| F | F | V |

FIGURE 5 – Table de vérité de « $P \Longleftrightarrow Q$ »

Exemples :

- Pour $x, x' \in \mathbb{R}$, l'équivalence « $x \cdot x' = 0 \iff (x = 0 \text{ ou } x' = 0)$ » est vraie.
- Voici une équivalence *toujours fausse* (quelque soit l'assertion $P$) : « $P \iff non(P)$ ».

On s'intéresse davantage aux assertions vraies qu'aux fausses, aussi dans la pratique et en dehors de ce chapitre on écrira « $P \iff Q$ » ou « $P \implies Q$ » uniquement lorsque ce sont des assertions vraies. Par exemple si l'on écrit « $P \iff Q$ » cela sous-entend « $P \iff Q$ *est vraie* ». Attention rien ne dit que $P$ et $Q$ soient vraies. Cela signifie que $P$ et $Q$ sont vraies en même temps ou fausses en même temps.

**Proposition 1**

Soient $P, Q, R$ trois assertions. Nous avons les équivalences (vraies) suivantes :

1. $P \iff non(non(P))$
2. $(P \text{ et } Q) \iff (Q \text{ et } P)$
3. $(P \text{ ou } Q) \iff (Q \text{ ou } P)$
4. $non(P \text{ et } Q) \iff (non\ P) \text{ ou } (non\ Q)$
5. $non(P \text{ ou } Q) \iff (non\ P) \text{ et } (non\ Q)$
6. $\big(P \text{ et } (Q \text{ ou } R)\big) \iff (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$
7. $\big(P \text{ ou } (Q \text{ et } R)\big) \iff (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)$
8. « $P \implies Q$ » $\iff$ « $non(Q) \implies non(P)$ »

**Démonstration**

Voici des exemples de démonstrations :

4. Il suffit de comparer les deux assertions « $non(P \text{ et } Q)$ » et « $(non\ P) \text{ ou } (non\ Q)$ » pour toutes les valeurs possibles de $P$ et $Q$. Par exemple si $P$ est vrai et $Q$ est vrai alors « $P$ *et* $Q$ » est vrai donc « $non(P \text{ et } Q)$ » est faux ; d'autre part (non $P$) est faux, (non $Q$) est faux donc « $(non\ P) \text{ ou } (non\ Q)$ » est faux. Ainsi dans ce premier cas les assertions sont toutes les deux fausses. On dresse ainsi les deux tables de vérités et comme elles sont égales les deux assertions sont équivalentes.

| $P \setminus Q$ | V | F |
|---|---|---|
| V | F | V |
| F | V | V |

FIGURE 6 – Tables de vérité de « $non(P \text{ et } Q)$ » et de « $(non\ P) \text{ ou } (non\ Q)$ »

6. On fait la même chose mais il y a trois variables : $P$, $Q$, $R$. On compare donc les tables de vérité d'abord dans le cas où $P$ est vrai (à gauche), puis dans le cas où $P$ est faux (à droite). Dans les deux cas les deux assertions « $\big(P \text{ et } (Q \text{ ou } R)\big)$ » et « $(P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$ » ont la même table de vérité donc les assertions sont équivalentes.

| $Q \setminus R$ | V | F |
|---|---|---|
| V | V | V |
| F | V | F |

| $Q \setminus R$ | V | F |
|---|---|---|
| V | F | F |
| F | F | F |

8. Par définition, l'implication « $P \implies Q$ » est l'assertion « $(non\ P) \text{ ou } Q$ ».
Donc l'implication « $non(Q) \implies non(P)$ » est équivalente à « $non(non(Q)) \text{ ou } non(P)$ » qui équivaut encore à « $Q \text{ ou } non(P)$ » et donc est équivalente à « $P \implies Q$ ». On aurait aussi pu encore une fois dresser les deux tables de vérité et voir quelles sont égales.

## 1.2. Quantificateurs

### Le quantificateur $\forall$ : « *pour tout* »

Une assertion $P$ peut dépendre d'un paramètre $x$, par exemple « $x^2 \geqslant 1$ », l'assertion $P(x)$ est vraie ou fausse selon la valeur de $x$.

L'assertion

$$\forall x \in E \quad P(x)$$

est une assertion vraie lorsque les assertions $P(x)$ sont vraies pour tous les éléments $x$ de l'ensemble $E$.

On lit « *Pour tout $x$ appartenant à $E$, $P(x)$* », sous-entendu « *Pour tout $x$ appartenant à $E$, $P(x)$ est vraie* ».

Par exemple :

- « $\forall x \in [1, +\infty[ \quad (x^2 \geqslant 1)$ » est une assertion vraie.
- « $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x^2 \geqslant 1)$ » est une assertion fausse.
- « $\forall n \in \mathbb{N} \quad n(n+1)$ *est divisible par* $2$ » est vraie.

### Le quantificateur $\exists$ : « *il existe* »

L'assertion

$$\exists x \in E \quad P(x)$$

est une assertion vraie lorsque l'on peut trouver au moins un $x$ de $E$ pour lequel $P(x)$ est vraie. On lit « *il existe $x$ appartenant à $E$ tel que $P(x)$ (soit vraie)* ».

Par exemple :

- « $\exists x \in \mathbb{R} \quad (x(x-1) < 0)$ » est vraie (par exemple $x = \frac{1}{2}$ vérifie bien la propriété).
- « $\exists n \in \mathbb{N} \quad n^2 - n > n$ » est vraie (il y a plein de choix, par exemple $n = 3$ convient, mais aussi $n = 10$ ou même $n = 100$, un seul suffit pour dire que l'assertion est vraie).
- « $\exists x \in \mathbb{R} \quad (x^2 = -1)$ » est fausse (aucun réel au carré ne donnera un nombre négatif).

### La négation des quantificateurs

La négation de « $\forall x \in E \quad P(x)$ » est « $\exists x \in E \quad non\ P(x)$ » .

Par exemple la négation de « $\forall x \in [1, +\infty[ \quad (x^2 \geqslant 1)$ » est l'assertion « $\exists x \in [1, +\infty[ \quad (x^2 < 1)$ ». En effet la négation de $x^2 \geqslant 1$ est non$(x^2 \geqslant 1)$ mais s'écrit plus simplement $x^2 < 1$.

La négation de « $\exists x \in E \quad P(x)$ » est « $\forall x \in E \quad non\ P(x)$ ».

Voici des exemples :

- La négation de « $\exists z \in \mathbb{C} \quad (z^2 + z + 1 = 0)$ » est « $\forall z \in \mathbb{C} \quad (z^2 + z + 1 \neq 0)$ ».
- La négation de « $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x + 1 \in \mathbb{Z})$ » est « $\exists x \in \mathbb{R} \quad (x + 1 \notin \mathbb{Z})$ ».
- Ce n'est pas plus difficile d'écrire la négation de phrases complexes. Pour l'assertion :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y > 0 \quad (x + y > 10)$$

sa négation est

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y > 0 \quad (x + y \leqslant 10).$$

### Remarques

L'ordre des quantificateurs est très important. Par exemple les deux phrases logiques

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad (x+y>0) \qquad \text{et} \qquad \exists y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (x+y>0).$$

sont différentes. La première est vraie, la seconde est fausse. En effet une phrase logique se lit de gauche à droite, ainsi la première phrase affirme « *Pour tout réel x, il existe un réel y (qui peut donc dépendre de x) tel que* $x+y>0$. » (par exemple on peut prendre $y=x+1$). C'est donc une phrase vraie. Par contre la deuxième se lit : « *Il existe un réel y, tel que pour tout réel x,* $x+y>0$. » Cette phrase est fausse, cela ne peut pas être le même $y$ qui convient pour tous les $x$ !
On retrouve la même différence dans les phrases en français suivantes. Voici une phrase vraie « *Pour toute personne, il existe un numéro de téléphone* », bien sûr le numéro dépend de la personne. Par contre cette phrase est fausse : « *Il existe un numéro, pour toutes les personnes* ». Ce serait le même numéro pour tout le monde !

Terminons avec d'autres remarques.

- Quand on écrit « $\exists x \in \mathbb{R} \quad (f(x)=0)$ » cela signifie juste qu'il existe un réel pour lequel $f$ s'annule. Rien ne dit que ce $x$ est unique. Dans un premier temps vous pouvez lire la phrase ainsi : « *il existe* au moins *un réel x tel que* $f(x)=0$ ». Afin de préciser que $f$ s'annule en une unique valeur, on rajoute un point d'exclamation :

$$\exists! x \in \mathbb{R} \quad (f(x)=0).$$

- Pour la négation d'une phrase logique, il n'est pas nécessaire de savoir si la phrase est fausse ou vraie. Le procédé est algorithmique : on change le « *pour tout* » en « *il existe* » et inversement, puis on prend la négation de l'assertion $P$.
- Pour la négation d'une proposition, il faut être précis : la négation de l'inégalité stricte « $<$ » est l'inégalité large « $\geqslant$ », et inversement.
- Les quantificateurs ne sont pas des abréviations. Soit vous écrivez une phrase en français : « *Pour tout réel x, si* $f(x)=1$ *alors* $x \geqslant 0$. » , soit vous écrivez la phrase logique :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (f(x)=1 \implies x \geqslant 0).$$

  Mais surtout n'écrivez pas « $\forall x$ *réel, si* $f(x)=1 \implies x$ *positif ou nul* ». Enfin, pour passer d'une ligne à l'autre d'un raisonnement, préférez plutôt « *donc* » à « $\implies$ ».
- Il est défendu d'écrire $\nexists, \not\Longrightarrow$ . Ces symboles n'existent pas !

**Mini-exercices**

1. Écrire la table de vérité du « *ou exclusif* ». (C'est le *ou* dans la phrase « *fromage ou dessert* », l'un ou l'autre mais pas les deux.)
2. Écrire la table de vérité de « *non (P et Q)* ». Que remarquez vous ?
3. Écrire la négation de « $P \implies Q$ ».
4. Démontrer les assertions restantes de la proposition 1.
5. Écrire la négation de « $\big(P \text{ et } (Q \text{ ou } R)\big)$ ».
6. Écrire à l'aide des quantificateurs la phrase suivante : « *Pour tout nombre réel, son carré est positif* ». Puis écrire la négation.

# 2. Raisonnements

Voici des méthodes classiques de raisonnements.

## 2.1. Raisonnement direct

On veut montrer que l'assertion « $P \implies Q$ » est vraie. On suppose que $P$ est vraie et on montre qu'alors $Q$ est vraie. C'est la méthode à laquelle vous êtes le plus habitué.

**Exemple 1**

Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $a+b \in \mathbb{Q}$.

**Démonstration**

Prenons $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}$. Rappelons que les rationnels $\mathbb{Q}$ sont l'ensemble des réels s'écrivant $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
Alors $a = \frac{p}{q}$ pour un certain $p \in \mathbb{Z}$ et un certain $q \in \mathbb{N}^*$. De même $b = \frac{p'}{q'}$ avec $p' \in \mathbb{Z}$ et $q' \in \mathbb{N}^*$. Maintenant

$$a+b = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq'+qp'}{qq'}.$$

Or le numérateur $pq'+qp'$ est bien un élément de $\mathbb{Z}$ ; le dénominateur $qq'$ est lui un élément de $\mathbb{N}^*$. Donc $a+b$ s'écrit bien de la forme $a+b = \frac{p''}{q''}$ avec $p'' \in \mathbb{Z}$, $q'' \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $a+b \in \mathbb{Q}$.

## 2.2. Cas par cas

Si l'on souhaite vérifier une assertion $P(x)$ pour tous les $x$ dans un ensemble $E$, on montre l'assertion pour les $x$ dans une partie $A$ de $E$, puis pour les $x$ n'appartenant pas à $A$. C'est la méthode de ***disjonction*** ou du ***cas par cas***.

**Exemple 2**

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x-1| \leqslant x^2 - x + 1$.

**Démonstration**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous distinguons deux cas.
**Premier cas :** $x \geqslant 1$. Alors $|x-1| = x-1$. Calculons alors $x^2 - x + 1 - |x-1|$.

$$\begin{aligned} x^2 - x + 1 - |x-1| &= x^2 - x + 1 - (x-1) \\ &= x^2 - 2x + 2 \\ &= (x-1)^2 + 1 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Ainsi $x^2 - x + 1 - |x-1| \geqslant 0$ et donc $x^2 - x + 1 \geqslant |x-1|$.
**Deuxième cas :** $x < 1$. Alors $|x-1| = -(x-1)$. Nous obtenons $x^2 - x + 1 - |x-1| = x^2 - x + 1 + (x-1) = x^2 \geqslant 0$. Et donc $x^2 - x + 1 \geqslant |x-1|$.
**Conclusion.** Dans tous les cas $|x-1| \leqslant x^2 - x + 1$.

## 2.3. Contraposée

Le raisonnement par ***contraposition*** est basé sur l'équivalence suivante (voir la proposition 1) :

L'assertion « $P \implies Q$ » est équivalente à « $non(Q) \implies non(P)$ ».

Donc si l'on souhaite montrer l'assertion « $P \implies Q$ », on montre en fait que si non($Q$) est vraie alors non($P$) est vraie.

**Exemple 3**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $n^2$ est pair alors $n$ est pair.

**Démonstration**

Nous supposons que $n$ n'est pas pair. Nous voulons montrer qu'alors $n^2$ n'est pas pair. Comme $n$ n'est pas pair, il est impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2\ell+1$ avec $\ell = 2k^2+2k \in \mathbb{N}$. Et donc $n^2$ est impair.
Conclusion : nous avons montré que si $n$ est impair alors $n^2$ est impair. Par contraposition ceci est équivalent à : si $n^2$ est pair alors $n$ est pair.

## 2.4. Absurde

Le ***raisonnement par l'absurde*** pour montrer « $P \implies Q$ » repose sur le principe suivant : on suppose à la fois que $P$ est vraie et que $Q$ est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si $P$ est vraie alors $Q$ doit être vraie et donc « $P \implies Q$ » est vraie.

**Exemple 4**

Soient $a, b \geqslant 0$. Montrer que si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.

**Démonstration**

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ **et** $a \neq b$. Comme $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a(1+a) = b(1+b)$ donc $a + a^2 = b + b^2$ d'où $a^2 - b^2 = b - a$. Cela conduit à $(a-b)(a+b) = -(a-b)$. Comme $a \neq b$ alors $a - b \neq 0$ et donc en divisant par $a-b$ on obtient $a+b = -1$. La somme de deux nombres positifs ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction.
Conclusion : si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.

Dans la pratique, on peut choisir indifféremment entre un raisonnement par contraposition ou par l'absurde. Attention cependant de bien écrire quel type de raisonnement vous choisissez et surtout de ne pas changer en cours de rédaction !

## 2.5. Contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type « $\forall x \in E \quad P(x)$ » est vraie alors pour chaque $x$ de $E$ il faut montrer que $P(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse. (Rappelez-vous la négation de « $\forall x \in E \quad P(x)$ » est « $\exists x \in E \quad non\ P(x)$ »). Trouver un tel $x$ c'est trouver un ***contre-exemple*** à l'assertion « $\forall x \in E \quad P(x)$ ».

**Exemple 5**

Montrer que l'assertion suivante est fausse « *Tout entier positif est somme de trois carrés* ».
(Les carrés sont les $0^2$, $1^2$, $2^2$, $3^2$,... Par exemple $6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$.)

**Démonstration**

Un contre-exemple est 7 : les carrés inférieurs à 7 sont 0, 1, 4 mais avec trois de ces nombres on ne peut faire 7.

## 2.6. Récurrence

Le ***principe de récurrence*** permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant de $n$, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes : lors de l'***initialisation*** on prouve $P(0)$. Pour l'étape d'***hérédité***, on suppose $n \geqslant 0$ donné avec $P(n)$ vraie, et on démontre alors que l'assertion $P(n+1)$ au rang suivant est vraie. Enfin dans la ***conclusion***, on rappelle que par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exemple 6**

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.

**Démonstration**

Pour $n \geqslant 0$, notons $P(n)$ l'assertion suivante :

$$2^n > n.$$

Nous allons démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

**Initialisation.** Pour $n = 0$ nous avons $2^0 = 1 > 0$. Donc $P(0)$ est vraie.

**Hérédité.** Fixons $n \geqslant 0$. Supposons que $P(n)$ soit vraie. Nous allons montrer que $P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2^n + 2^n \\ &> n + 2^n \qquad \text{car par } P(n) \text{ nous savons } 2^n > n, \\ &> n + 1 \qquad \text{car } 2^n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

**Conclusion.** Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, c'est-à-dire $2^n > n$ pour tout $n \geqslant 0$.

Remarques :

- La rédaction d'une récurrence est assez rigide. Respectez scrupuleusement la rédaction proposée : donnez un nom à l'assertion que vous souhaitez montrer (ici $P(n)$), respectez les trois étapes (même si souvent l'étape d'initialisation est très facile). En particulier méditez et conservez la première ligne de l'hérédité « Fixons $n \geqslant 0$. Supposons que $P(n)$ soit vraie. Nous allons montrer que $P(n+1)$ est vraie. »
- Si on doit démontrer qu'une propriété est vraie pour tout $n \geqslant n_0$, alors on commence l'initialisation au rang $n_0$.
- Le principe de récurrence est basé sur la construction de $\mathbb{N}$. En effet un des axiomes pour définir $\mathbb{N}$ est le suivant : « *Soit $A$ une partie de $\mathbb{N}$ qui contient $0$ et telle que si $n \in A$ alors $n+1 \in A$. Alors $A = \mathbb{N}$* ».

**Exercice**

1. (Raisonnement direct) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. Montrer que si $a \leqslant b$ alors $a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b$ et $a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b$.
2. (Cas par cas) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est divisible par 2 (distinguer les $n$ pairs des $n$ impairs).
3. (Contraposée ou absurde) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $b \neq 0$ alors $a + b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. (On utilisera que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.)
4. (Absurde) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.
5. (Contre-exemple) Est-ce que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x < 2 \implies x^2 < 4$ ?
6. (Récurrence) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
7. (Récurrence) Fixons un réel $x \geqslant 0$. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

# Exercices de logique

---

**Exercice 1** Ecrire les contraposées des implications suivantes et les démontrer. $n$ est un entier naturel, $x$ et $y$ sont des nombres réels.

1. $n$ premier $\Rightarrow n = 2$ ou $n$ est impair ,
2. $xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ et $y \neq 0$ ,
3. $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$ .

**Exercice 2** Ecrire les réponses aux questions suivantes, portant sur des entiers naturels, sous la forme d'assertions mathématiques (écrites avec les symboles "$\forall$", "et", "ou", "$\Rightarrow$", "$\Leftrightarrow$") et les prouver.

1. Le produit de deux nombres pairs est-il pair ?
2. Le produit de deux nombres impairs est-il impair ?
3. Le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est-il pair ou impair ?
4. Un nombre entier est-il pair si et seulement si son carré est pair ?

**Exercice 3** Soient les quatre assertions suivantes :

1. $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$ ,
2. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$ ,
3. $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ y^2 > x$ ,
4. $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}^{+*},\ |x| < \alpha \Rightarrow |x^2| < \varepsilon$ .

Les assertions 1, 2, 3 et 4 sont elles vraies ou fausses ? Donner leurs négations.

**Exercice 4**

1. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Montrer par l'absurde que, si $n$ n'est pas premier, il admet un diviseur premier $p$ qui est inférieur ou égal à $\sqrt{n}$ .
2. A l'aide de ce critère, déterminer si les nombres 89, 167 et 191 sont premiers.

**Exercice 5** Montrer que $\sqrt{89}$ est irrationnel.

**Exercice 6** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que soit 4 divise $n^2$, soit 4 divise $n^2 - 1$.

**Exercice 7** * Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

1. $n^3 - n$ est divisible par 6 ,
2. $n^5 - n$ est divisible par 30 ,
3. $n^7 - n$ est divisible par 42 .

*Indication : Pour 1, on peut factoriser $n^3 - n$ pour voir que ce nombre est multiple de 2 et de 3. Les cas 2 et 3 peuvent se traiter de façon analogue.*

**Exercice 8** Démontrer par récurrence que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} - \{0,1,2,3\}, \quad n^2 \leqslant 2^n \ .$$

**Exercice 9** Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit deux propriétés :

$$P_n \ \ : 3 \text{ divise } 4^n - 1 \quad \text{et} \quad Q_n \ \ : 3 \text{ divise } 4^n + 1 \ .$$

1. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ et $Q_n \Rightarrow Q_{n+1}$ .
2. Montrer que $P_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ .
3. Que penser, alors, de l'assertion : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \Rightarrow Q_n$ ?

# *Correction d'exercices de logique*

***Correction 1***

1. $n$ pair, $n \neq 2 \Rightarrow n$ non premier. Démo : si $n$ pair, $n \neq 2$ alors 2 divise $n$ et $n$ n'est pas premier.
2. $x = 0$ ou $y = 0 \Rightarrow xy = 0$. Démo triviale.
3. $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \Rightarrow x = y$. Démo : si $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$ alors en développant $-x+y = x-y$, d'où $2y = 2x$, $x = y$.

***Correction 2***

1. Oui. $n, m$ pairs $\Rightarrow nm$ pair. Démo : $\exists i, n = 2i$ donc $nm = 2(im)$ est pair.
2. Oui. $n, m$ impairs $\Rightarrow nm$ impair. Démo : $\exists i, j,\ n = 2i+1,\ m = 2j+1$ donc $nm = 2(2ij+i+j)+1$ est impair (ou par contraposée).
3. Pair. ($n$ pair, $m$ impair) $\Rightarrow nm$ pair (cf 1).
4. Oui. $n$ pair $\Leftrightarrow n^2$ pair. Démo : si $n$ pair alors $n^2 = n \times n$ est pair par 1) (sens $\Rightarrow$) ; Si $n$ impair alors $n^2$ est impair par 2), ce qui donne le sens $\Leftarrow$ par contraposée.

***Correction 3***

1. Faux. Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y \leqslant 0$ (démo : soit $x \in \mathbb{R}$, on prend $y = -x$).
2. Vrai (démo : $y = -x+1$). Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x+y \leqslant 0$.
3. Vrai (démo : soit $x = -1$, $\forall y \in \mathbb{R}, y^2 > -1$). Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 \leqslant x$.
4. Vrai (démo : $\alpha = \sqrt{\varepsilon} \in \mathbb{R}^{+*}$). Négation : $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \exists x \in \mathbb{R}, |x| < \alpha$ et $|x^2| \geqslant \varepsilon$.

***Correction 4*** 1. Soit $n$ non premier. Supposons que $n$ n'a pas de diviseur premier $p \leqslant \sqrt{n}$. $n$ non premier $\Rightarrow \exists a, b \geqslant 2$, $n = ab$. Tout nombre $x \geqslant 2$ a un diviseur premier $\leqslant x$. Si $a \leqslant \sqrt{n}$ ou $b \leqslant \sqrt{n}$, cela donne une contradiction. Donc $a > \sqrt{n}$ et $b > \sqrt{n}$, ce qui implique $n > n$, absurde. D'où le résultat.

2. • $\sqrt{89} \simeq 9.4$. 89 n'est pas divisible par $2, 3, 5$ ou 7, donc 89 est premier.
   • $\sqrt{167} \simeq 12.9$. 167 n'est pas divisible par $2, 3, 5, 7, 11$ donc 167 est premier.
   • $\sqrt{191} \simeq 13.8$. 191 n'est pas divisible par $2, 3, 5, 7, 11, 13$ donc 191 est premier.

***Correction 5*** Raisonnement par l'absurde. Supposons que $\sqrt{89} = \frac{p}{q}$ avec $p, q$ premiers entre eux. Alors $89q^2 = p^2$. 89 est premier (exo 4) donc 89 divise $p$ : il existe $k$, $p = 89k$. Donc $q^2 = 89k^2$ et 89 divise $q$. C'est une contradiction donc $\sqrt{89}$ est irrationnel.

***Correction 6*** Si $n = 2k$ (pair) alors 4 divise $n^2 = 4k^2$. Si $n = 2k + 1$ (impair) alors 4 divise $n^2 - 1 = 4(k^2 + k)$.

***Correction 7*** $n^3 - n = n(n^2 - 1)$. $n$ pair $\Rightarrow n^3 - n$ multiple de 2. $n$ impair $\Rightarrow n^2 - 1$ pair et $n^3 - n$ multiple de 2.
$n$ multiple de 3 $\Rightarrow n^3 - n$ multiple de 3. $n = 3k + 1 \Rightarrow n^2 - 1 = 3(3k^2 + 2k)$ multiple de 3. $n = 3k + 2 \Rightarrow n^2 - 1 = 3(3k^2 + 4k)$ multiple de 3. Dans les 3 cas, $n^3 - n$ est multiple de 3.
$n^3 - n$ est divisible par 2 et 3 qui sont premiers entre eux donc $n^3 - n$ est divisible par 6.

***Correction 8*** Initialisation : pour $n = 4$, $4^2 = 16 = 2^4$.
Hérédité : on suppose $n^2 \leqslant 2^n$ avec $n \geqslant 4$. $n > 2$ donc $2n < n \times n$, donc $2n \leqslant n^2 - 1$. D'où $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leqslant n^2 + n^2 \leqslant 2.2^n = 2^{n+1}$. C'est la propriété au rang $n + 1$.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 4$, $n^2 \leqslant 2^n$.

***Correction 9*** 1. Si $P_n$ est vraie alors $4^{n+1} - 1 = 4(4^n - 1) + 3$ est un multiple de 3 donc $P_{n+1}$ est vraie. Si $Q_n$ est vraie alors $4^{n+1} + 1 = 4(4^n + 1) - 3$ est un multiple de 3 donc $Q_{n+1}$ est vraie.

2. Initialisation : $4^0 - 1 = 0$ donc $P_0$ est vraie. Hérédité : question 1). Conclusion : $P_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. C'est faux. Preuve par l'absurde : Si $Q_{n_0}$ est vraie alors $(4^{n_0} + 1) + (4^{n_0} - 1) = 4^{n_0}$ est un multiple de 3 à cause de $P_{n_0}$ et $Q_{n_0}$. Or le seul nombre premier qui divise $4^{n_0}$ est 2, donc c'est absurde et $Q_{n_0}$ est fausse.

# Chapitre 2

# *Généralités sur les fonctions numeriques*

## I. *Parité et périodicité d'une fonction*

### *1) Fonctions paires*

***Définition 1.***

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$. On dit que D est symétrique par rapport à zéro ou que D est centré en zéro, si et seulement si :

pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $[\, x \in D \text{ ssi } -x \in D \,]$

***Exemples.***

$\mathbb{R}$ , $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ , $[-\pi;+\pi]$ , $\mathbb{R}\setminus\{-1;+1\}$ sont symétriques par rapport à zéro.

$\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ , $[1;+\infty[$ ne sont pas symétriques par rapport à zéro.

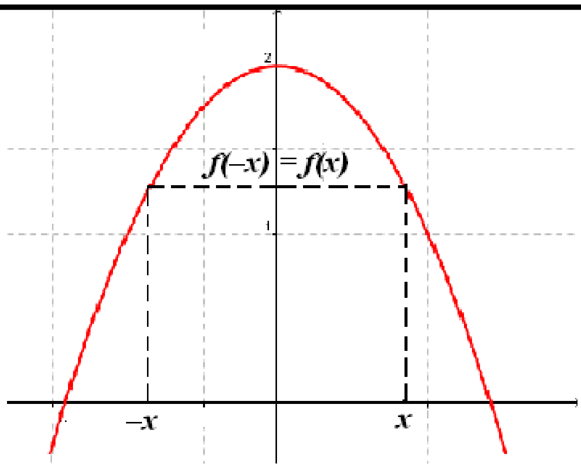
***Définition 2.***

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction définie sur D.
On dit que $f$ est ***paire*** lorsque les 2 conditions suivantes sont vérifiées :

1°) le domaine de définition D est symétrique par rapport à zéro ;
2°) et pour tout $x \in D$ : $[\; f(-x) = f(x) \;]$

***Théorème 1***

Dans un repère orthogonal (ou orthonormé), la courbe représentatative d'une fonction paire est *symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*




***Exemple*** :(modèle)

La fonction carrée $x \to x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction paire car $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro et pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

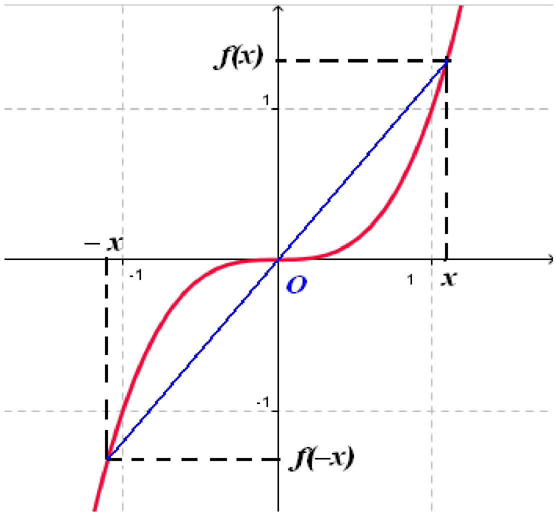
**Définition 3.**

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction définie sur D.
On dit que $f$ est ***impaire*** lorsque les 2 conditions suivantes sont vérifiées :

1°) le domaine de définition D est symétrique par rapport à zéro ;
2°) et pour tout $x \in D$ : $[\; f(-x) = -f(x) \;]$

***Théorème 2***

Dans un repère orthogonal (ou orthonormé), la courbe représentatative d'une fonction paire est *symétrique par rapport à l'origine O du repère.*




***Exemple*** :(modèle)

La fonction cube $x \to x^3$ définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction impaire car
$D_f = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro et pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

***Remarque*** : Si une fonction est paire ou impaire, on réduit le domaine d'étude à la partie positive de $D_f$. La courbe de $f$ peut alors se construire *par symétrie* par rapport à l'axe des ordonnées ou par rapport à l'origine $O$ du repère.

## 3) *Fonctions périodiques*

***Définition 4.***

Soit $D$ un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction définie sur $D$ et $T \in \mathbb{R}$ un nombre réel donné. On dit que $f$ est ***périodique** de **période T*** lorsque les 2 conditions suivantes sont vérifiées :

1°) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ : [ $x \in D$ ssi $x + T \in D$ ]

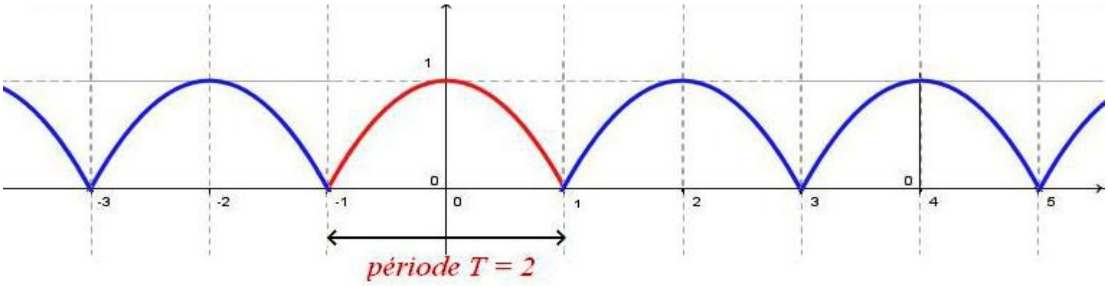
2°) et pour tout $x \in D$ : [ $f(x+T) = f(x)$ ]

***Remarque*** : Pour construire la courbe d'une fonction périodique $f$ de période $T \in \mathbb{R}$, on construit (une portion de) la courbe sur un intervalle de longueur T, puis *on duplique indéfiniment* cette portion à droite et à gauche.

On dit qu'on a réduit le domaine d'étude à un intervalle de longueur T de $D_f$.

***Exemple.***

Pour construire sur $\mathbb{R}$ la fonction périodique de période T = 2 et définie pour $x \in [-1\,;+1]$ par : $f(x) = 1 - x^2$ , il suffit de construire la courbe de $f$ sur un intervalle de longueur une période, ici $[-1\,;+1]$ , puis dupliquer indéfiniment.




# II. *Fonctions trigonométriques*

## *1) Rappels et définitions*

Dans un repère orthonormé (O ; I , J ) du plan, soit M un point quelconque du cercle trigonométrique C(O; 1) tel que la mesure en *radians* de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ soit égale à $x$ *radians*. On dit que M est le *point associé* à $x$ sur le cercle C(O; 1).

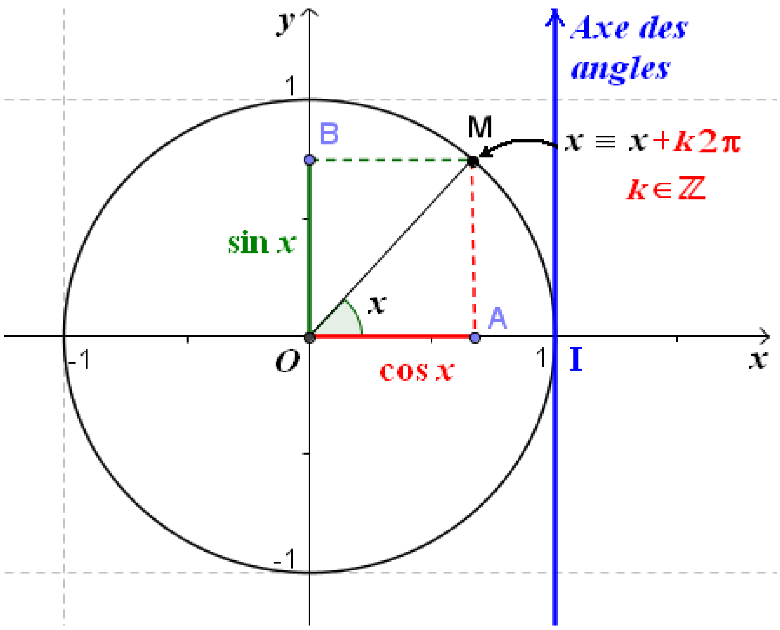
***Définition 1.***

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, soit $x$ un nombre réel et M le point associé à $x$ sur C(O; 1). Alors

- le **cosinus de $x$,** noté **cos $x$**, désigne l'abscisse du point M ;
- le **sinus de $x$,** noté **sin $x$**, désigne l'ordonnée du point M.

On définit ainsi deux fonctions, **cos** et **sin** sur $\mathbb{R}$ comme suit :

$$\cos : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos x\end{array} \quad \text{et} \quad \sin : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin x\end{array}$$



## 2) *Propriétés*

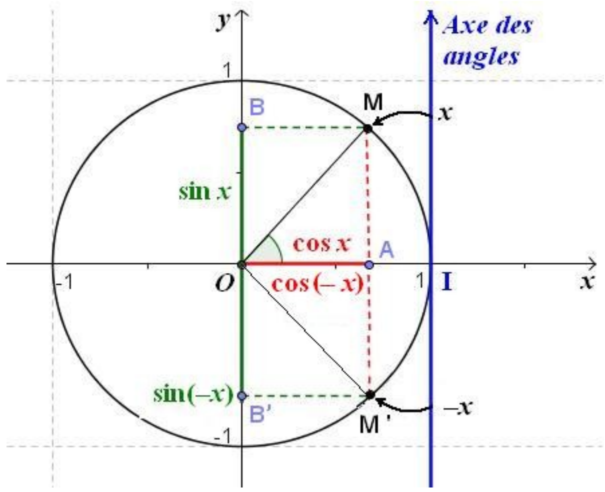
### *Propriété 1*

Les fonctions cosinus et sinus sont *définies* sur tout $\mathbb{R}$. De plus :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ : **cos (–*x*) = cos *x*.** Donc la fonction cosinus est ***paire***.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ : **sin (–*x*) = – sin *x*.** Donc la fonction sinus est ***impaire***.

Par conséquent, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan,

- La courbe de la fonction ***cosinus*** *est symétrique par rapport à l'axes des ordonnées*. Donc, on peut réduire son intervalle d'étude à $[0 ; +\infty[$ .
- La courbe de la fonction ***sinus*** *est symétrique par rapport à l'origine O* du repère. Donc, on peut aussi réduire son intervalle d'étude à $[0 ; +\infty[$ .




Soit M un point quelconque du cercle trigonométrique tel que la mesure de l'angle orienté soit égale à *x radians*. On peut lui associer une *famille de nombres réels* de la forme , , qui correspondent au *même point* M du cercle trigonométrique.

### *Propriété 2*

Les fonctions cosinus et sinus sont ***périodiques*** de ***période*** $T = 2\pi$ .

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ .
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ .

En effet; les nombres $x$ et $x + k2\pi$ , $k \in \mathbb{Z}$ , correspondent au *même point* M du cercle trigonométrique. Donc $x$ et $x + k2\pi$ ont exactement le même cosinus en abscisse et le même sinus en ordonnée.

Par conséquent, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on peut réduire l'intervalle d'étude des fonctions cosinus et sinus à un intervalle de longueur $T = 2\pi$ . Par exemple, $D = [-\pi ; +\pi]$ .

# III) Les oprérations sur les fonctions

## 1) Comparaison de fonctions

**Définition 3** :On dit que deux fonction $f$ et $g$ sont égales si et seulement si :
- Elles ont même ensemble de définition : $D_f = D_g$
- Pour tout $x \in D_f$, $f(x) = g(x)$

***Exemple*** :

Les fonction $f$ et $g$ définies respectivement par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$$

Sont-elles égales ?

Déterminons leur ensemble de définition :

Pour $f$, on doit avoir : $\frac{x-1}{x+3} \geqslant 0$, ce qui donne $D_f = ]-\infty; -3[\cup[1; +\infty[$

Pour $g$, on doit avoir : $x - 1 \geqslant 0$ et $x + 3 > 0$, ce qui donne $D_g = [1; +\infty[$

On a donc : $D_f \neq D_g$. Les fonction ne sont donc pas égales.

On remarquera cependant que sur $[1; +\infty[$, on a $f(x) = g(x)$

***Définition*** : Soit $I$ un intervalle et soient $f$ et $g$ deux fonctions définies au moins sur $I$. On dit que :
- $f$ est inférieure à $g$ sur $I$ lorsque : $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in I$. On note : $f \leqslant g$ sur $I$.
- $f$ est positive sur $I$ lorsque : $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$. On note : $f \geqslant 0$ sur $I$.
- $f$ est **majorée** sur $I$ lorsqu'il existe un réel $M$ tel que : $f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in I$.
- $f$ est **minorée** sur $I$ lorsqu'il existe un réel $m$ tel que : $m \leqslant f(x)$ pour tout $x \in I$.
- $f$ est **bornée** sur $I$ lorsqu'il existe des réels $M$ et $m$ tels que : $m \leqslant f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in I$. ($f$ est majorée et minorée)

Remarque : La relation d'ordre pour les fonctions n'est pas totale car deux fonctions ne sont pas toujours comparables.

On considère les fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$. On a par exemple :

$$\frac{1}{2} > \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad f\left(\frac{1}{2}\right) > g\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$2 < 2^2 \quad \Leftrightarrow \quad f(2) < g(2)$$

***Exemple*** **:** Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x(1-x)$. Démontrer que $f$ est majorée sur $\mathbb{R}$.

On met la fonction sous la forme canonique :

$$f(x) = -x^2 + x = -(x^2 - x) = -\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]$$

La parabole représentant $f$ est tournée vers le bas et son sommet a pour ordonnée $\frac{1}{4}$. La fonction $f$ est donc majorée sur $\mathbb{R}$.

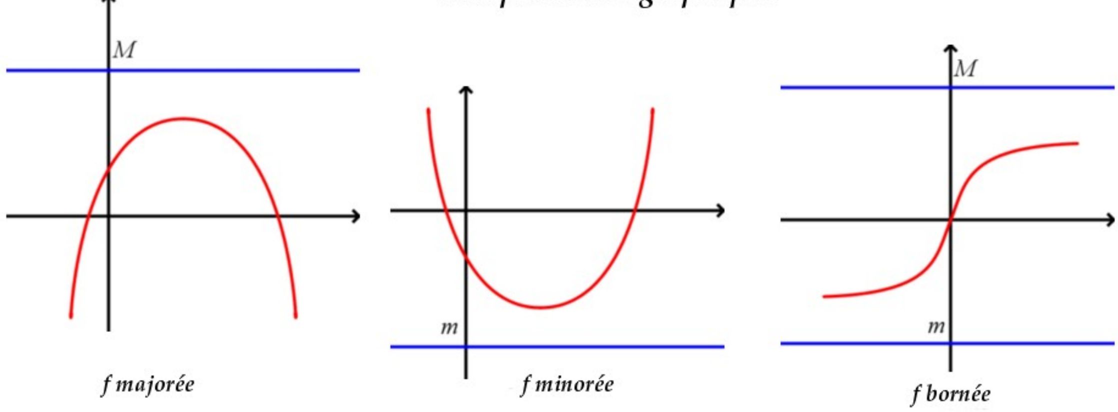
***Exemple*** **:** Montrer que la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4\sin x - 3$ est bornée.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} -1 &\leqslant \sin x \leqslant 1 \\ -4 &\leqslant 4\sin x \leqslant 4 \\ -7 &\leqslant 4\sin x - 3 \leqslant 1 \\ -7 &\leqslant g(x) \leqslant 1 \end{aligned}$$

$g$ est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

***Interprétations graphiques***




> <u>*Propriéte*</u> **:** Si $f$ une fonction monotone sur un intervalle $I = [a; b]$ alors $f$ est bornée.

***Démonstration*** **:** Supposons que $f$ est croissante sur $[a; b]$ (le cas $f$ décrois-sante se traite de façon analogue).

Soit $x \in [a; b]$, on a alors : $a \leqslant x \leqslant b$, comme $f$ est croissante, elle conserve la relation d'ordre, d'où : $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$. On peut prendre $m = f(a)$ et $M = f(b)$, $f$ est donc bornée.

## 2)Variations d'une fonction

*Définition* : Soit $I$ un intervalle (ouvert ou fermé, borné ou non)

Soit $f$ une fonction définie au moins sur $I$. On dit que :

➪ $f$ est **croissante** sur I si, et seulement si :
pour tous $u$ et $v$ de $I$ : $v > u \Rightarrow f(v) > f(u)$

➪ $f$ est **décroissante** sur $I$ si, et seulement si :
pour tous $u$ et $v$ de $I$ : $v > u \Rightarrow f(v) < f(u)$

➪ $f$ est **monotone** sur $I$ si, et seulement si :
$f$ est croissante sur $I$ ou décroissante sur $I$.

***Remarque*** : On dit qu'une fonction craoissante conserve la relation d'ordre et qu'une fonction décroissante inverse la relation d'ordre.

Nous verrons au chapitre suivant que la fonction dérivée est l'instrument qui permet de déterminer les variations d'une fonction.

## 2) *Résolution graphique*

Soit la fonction $f$ définie sur $[-1,8;2,9]$ par : $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 15$ dont la représentation se trouve à la page suivante :

1) Déterminer le tableau de variation de la fonction $f$

2) Résoudre les équations suivantes :

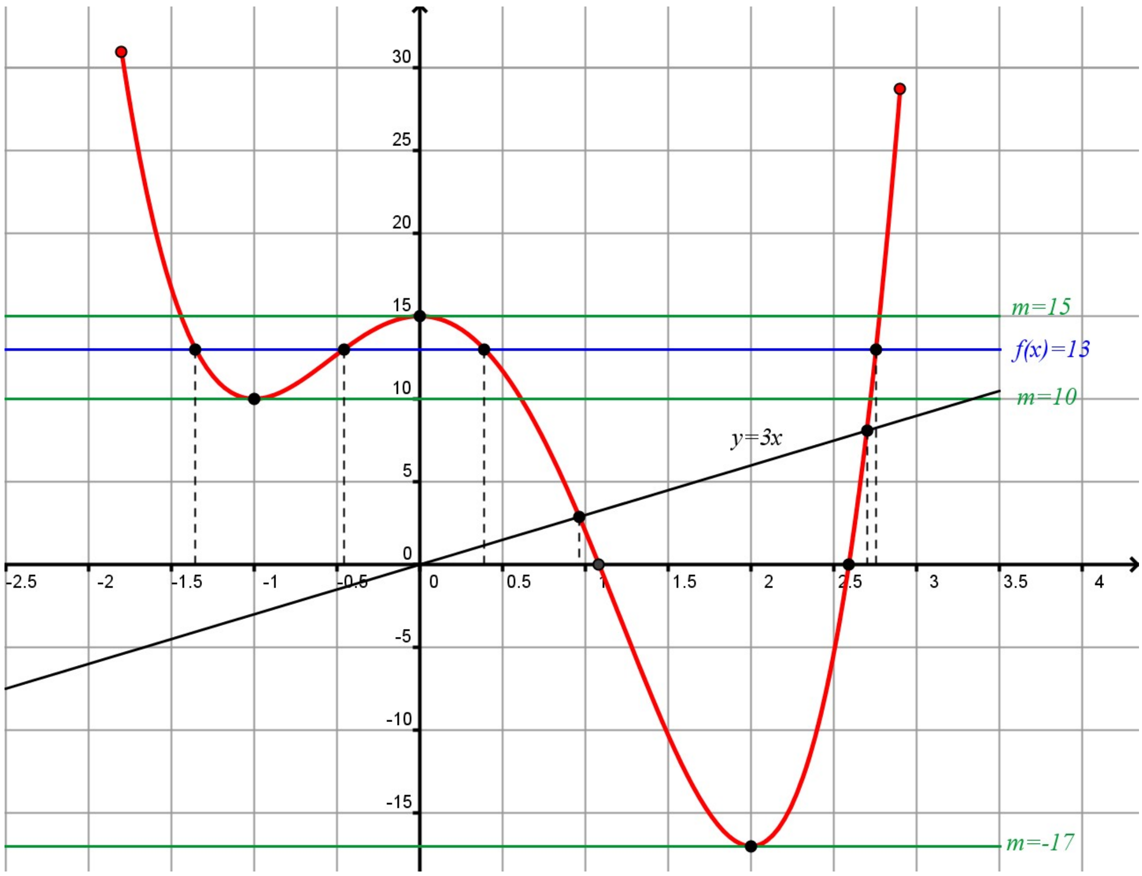
a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = 13$

3) D'une façon générale donner le nombre et le signe des solutions de l'équation $f(x) = m$ où $m$ est un réel quelconque.

4) Résoudre les inéquations suivantes :

a) $f(x) \leqslant 0$ b) $f(x) > 13$

5) Résoudre l'équation $f(x) = 3x$




1) On obtient le tableau de variation suivant :

| $x$ | -1,8 | | -1 | | 0 | | 2 | | 2,9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 31 | ↘ | 10 | ↗ | 15 | ↘ | -17 | ↗ | 29 |

2) a) $f(x) = 0$ : on cherche les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses, on obtient donc :

$$x_1 \simeq 1,1 \qquad\qquad x_2 \simeq 2,6$$

b) $f(x) = 13$ : on cherche les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite $y = 13$, on obtient donc :

$$x_1 \simeq -1,3 \qquad x_2 \simeq -0,4 \qquad x_3 \simeq 0,4 \qquad x_4 \simeq 2,75$$

3) $f(x) = m$ : on cherche les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite $y = m$, on obtient donc suivant les valeurs de $m$ :

- Si $m < -17$ : l'équation n'a pas de solution
- Si $m = -17$ : l'équation admet une solution (positive)
- Si $-17 < m < 10$ : l'équation admet deux solutions (2 positives)

- Si $m = 10$ : l'équation admet 3 solutions (1 négative et 2 positives)
- Si $10 < m < 15$ : l'équation admet 4 solutions (2 négatives et 2 positives)
- Si $m = 15$ : l'équation admet 3 solutions (1 négative, 1 nulle et 1 positive)
- Si $m > 15$ : l'équation admet 2 solutions (1 négative et 1 positive)

4) a) $f(x) \leqslant 0$ : On cherche les abscisses des points de la courbe qui sont sur ou en dessous de la droite des abscisses, on a donc :
$$S = [1,1;2,6]$$
b) $f(x) > 13$ : On cherche les abscisses des points de la courbe qui sont au dessus de la droite d'équation $y = 13$, on a donc :
$$S = [-1,8;-1,3[\cup]-0,4;0,4[\cup]2,75;2,9]$$

5) $f(x) = 3x$ : On cherche les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = 3x$. On trace donc sur le graphique cette droite puis on lit les solutions :
$$x_1 \simeq 0,9 \qquad\qquad x_2 \simeq 2,7$$

# 4) *Composée de deux fonctions*

## *Définition*

Lorsqu'on applique deux fonctions successivement, on parle de composition de fonctions ou de composée de deux fonctions. On peut alors faire le schéma suivant :
$$x \xrightarrow{f} y = f(x) \xrightarrow{g} z = g(y) = g[f(x)] = g \circ f(x)$$

Soit $D_f$ et $D_g$ les ensembles de définition des fonctions $f$ et $g$.

$f(D_f)$ : représente l'image de l'ensemble de définition de $f$ par la fonction $f$. Pour pouvoir appliquer ensuite la fonction $g$, il est nécessaire que cet ensemble soit inclut dans $D_g$ : $f(D_f) \subset D_g$
$$\forall x \in D_f \quad \text{on doit avoir} \quad f(x) \in D_g$$

***Exemple :*** : Soit les deux fonctions $f$ et $g$ définies par : $f(x) = 3x + 4$ on a donc : $D_f = \mathbb{R}$

$g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ on a donc : $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$

Comme la fonction $f$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, $f(D_f)$ n'est pas inclus dans $D_g$. Il faut donc réduire $D_f$.

On doit enlever la valeur de $x$ tel que : $f(x) = -1$
$$3x + 4 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{5}{4}$$

On a alors l'ensemble de définition de la composée : $D_{g\circ f} = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{5}{4}\right\}$

***Définition*** **:** Soit 2 fonctions $f$ et $g$ avec $f(D_f) \subset D_g$.
On appelle fonction composée de $f$ par $g$, la fonction notée : $g \circ f$ telle que :

$$g \circ f(x) = g[f(x)]$$

***Remarque*** :La composée de deux fonctions n'est pas commutative c-a-d gof diferent de fog

***Exemple*** **:** Soit les fonctions $f$ et $g$ définies par

$$f(x) = x - 2 \quad \text{et} \quad g(x) = 4x + 3$$

Les deux fonctions étant définies sur $\mathbb{R}$, les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ sont définies sur $\mathbb{R}$. On a :

$$g \circ f(x) = g(x-2) = 4(x-2) + 3 = 4x - 5$$
$$f \circ g(x) = f(4x+3) = (4x+3) - 2 = 4x + 1$$

## *Application*

1) Soit les deux fonctions suivantes $f$ et $g$ définies par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \quad \text{et} \quad g(x) = 3x$$

Calculer $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$ après avoir précisé les ensembles de définition.

On détermine $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ et $D_g = \mathbb{R}$

Comme la fonction $g$ est définie sur $\mathbb{R}$, $D_{g \circ f} = D_f$, on a alors :

$$g \circ f(x) = g\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{3}{x+1}$$

Pour $f \circ g$, on doit enlever la valeur : $g(x) = -1$, soit $3x = -1$ et donc $x = -\frac{1}{3}$.

$$D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\} \quad \text{et} \quad f \circ g(x) = f(3x) = \frac{1}{3x+1}$$

Il est nécessaire de déterminer l'ensemble de définition avant de calculer la composée de deux fonctions comme nous allons le voir sur cet exemple.

2) $f$ et $g$ sont les fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{x+3}{x+1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x}{x+2}$$

On pose $h = g \circ f$.

a) Trouver l'ensemble de définition de $h$ et calculer explicitement $h(x)$.

b) La fonction $k$ est définie par $k(x) = \dfrac{x+3}{3x+5}$.

Les fonction $h$ et $k$ sont-elles égales ?

a) On a $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ et $D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$.
On doit donc enlever la valeur telle que $f(x) = -2$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{x+1} &= -2 \\ x+3 &= -2x-2 \\ 3x &= -5 \\ x &= -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

On a donc $D_h = \mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{3}; -1\right\}$

$$h(x) = g\left(\frac{x+3}{x+1}\right) = \frac{\dfrac{x+3}{x+1}}{\dfrac{x+3}{x+1}+2}$$

on multiplie numérateur et dénominateur par $x+1$

$$= \frac{x+3}{x+3+2x+2} = \frac{x+3}{3x+5}$$

b) $D_k = \mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{3}\right\}$. Les fonctions ne sont pas égales car elles n'ont pas le même ensemble de définition

Il peut être intéressant de décomposer une fonction en fonctions élémentaires pour connaître ses variations

3) Exprimer les fonctions suivantes à l'aide de fonctions élémentaires.

$$f_1(x) = \frac{1}{3x-1} \qquad f_2(x) = \sqrt{x+3} \qquad f_3(x) = 3\sqrt{x}+4$$

Pour la fonction $f_1$, on pose $f_1 = h \circ g$, on a alors :

$$g(x) = 3x-1 \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1}{x}$$

Pour la fonction $f_2$, on pose $f_2 = h \circ g$, on a alors :

$$g(x) = x+3 \quad \text{et} \quad h(x) = \sqrt{x}$$

Pour la fonction $f_3$, on pose $f_3 = h \circ g$, on a alors :

$$g(x) = \sqrt{x} \quad \text{et} \quad h(x) = 3x+4$$

## *5) Variations d'une fonction composée*

***Théorème*** **:** Soit une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$ et une fonction $g$ définie sur $f(I)$.

- Si $f$ et $g$ ont **même variation** respectivement sur $I$ et $f(I)$ alors la fonction $g \circ f$ est **croissante** sur $I$.
- Si $f$ et $g$ ont des **variations opposés** respectivement sur $I$ et $f(I)$ alors la fonction $g \circ f$ est **décroissante** sur $I$.

***Démonstration*** **:** Nous ferons la démonstration pour une fonction $f$ croissante sur $I$ et une fonction $g$ décroissante sur $f(I)$.

On sait que $f$ est décroissante sur $I$, donc dans $I$ :

$$\text{si} \quad u < v \quad \text{alors} \quad f(u) < f(v)$$

On sait que $g$ est décroissante sur $f(I)$, donc dans $f(I)$ :

$$\text{si} \quad f(u) < f(v) \quad \text{alors} \quad g[f(u)] > g[f(v)]$$

On a donc dans $I$ :

$$\text{si} \quad u < v \quad \text{alors} \quad g \circ f(u) > g \circ f(v)$$

La fonction $g \circ f$ est décroissante sur $I$

**Exemple** **:** Soit la fonction $h$ définie sur $]-\infty; 1]$ par $h(x) = \sqrt{1-x}$

1) Décomposer $h$ en deux fonctions élémentaires.
2) Déterminer les variations de $h$.

1) La fonction $h$ se décompose en $g \circ f$, on a alors :

$$f(x) = 1 - x \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

2) On sait que la fonction :
   - $f$ est décroissante sur $]-\infty; 1]$ et $f(]-\infty; 1]) = [0; +\infty[$
   - $g$ est croissante sur $[0; +\infty[$

   d'après le théorème des fonctions composées, $h$ est décroissante sur $]-\infty\,;\,1]$

   On a alors le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ |
|---|---|---|---|
| $h(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ |

# Exercices

**Exercice 1**

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = \cos(\pi x)$

1) Etudier la parité de la fonction $f$
2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x+2) = f(x)$
3) Déduire que la fonction $f$ est périodique

**Exercice 2**

Soit $f$ la fonction numérique définie par

$f(x) = |x-1| + |x+1|$

1) Etudier la parité de la fonction $f$
2) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) \geq 2$
3) Résoudre l'équation $f(x) = 2$ et déduire une valeur minimale de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$

**Exercice 3**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + x$

1) Ecrire $f(x)$ sous forme canonique
2) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$ ; $f(x) \geq -\dfrac{1}{4}$
3) Résoudre l'équation $f(x) = -\dfrac{1}{4}$ et déduire une valeur minimale de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$

**Exercice 4**

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

1) Déterminer $D_f$ .
2) Etudier la parité de la fonction $f$ .
3) Déterminer le signe de $(f(x))^2 - 4$ et déduire que la fonction $f$ admet une valeur maximale sur $D_f$ .

**Exercice 5**

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

1) Déterminer $D_f$
2) Vérifier que $\forall x \in D_f$ $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}}$
3) Montrer que $f$ est décroissante sur $D_f$
4) Montrer que $\forall x \in D_f$ $0 < f(x) \leq 1$
5) Calculer $f(-1)$ est déduire que 1 est une valeur maximale de la fonction $f$ sur $D_f$

**Exercice 6**

Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies par : $f(x) = \sqrt{x-1}$

Et $g(x) = \dfrac{x}{x+2}$

1) Déterminer $D_{f\circ g}$ et $D_{g\circ f}$
2) Donner l'expression de $(f\circ g)(x)$ pour tout $x \in D_{f\circ g}$

**Exercice 7**

Ecrire la fonction $f$ sous forme de la composée de deux fonctions $u$ et $v$ dans les cas suivants :

1) $f(x) = \sqrt{1-2x}$
2) $f(x) = (2x+1)^2$
3) $f(x) = \dfrac{|x|-2}{|x|+3}$
4) $f(x) = 2\sqrt{x^2+3}$

**Exercice 8**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies par :

$f(x) = 3x-5$ et $g(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2+1}$

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$ ; $g(x) = 1 + \dfrac{x^2}{x^2+1}$
2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$ ; $g(x) = 2 - \dfrac{x^2}{x^2+1}$

   Et déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}$ ; $1 \leq g(x) \leq 2$
3) La fonction $f$ est-elle bornée sur $\mathbb{R}$ ?
4) Montrer que la fonction $g\circ f$ est bornée sur $\mathbb{R}$
5) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$ ; $-2 \leq (g\circ f)(x) \leq 1$

**Exercice 9**

1) Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x^2 + 2x$
   a. Déterminer la monotonie de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}^+$
   b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$ ; $f(x) \geq 0$
2) Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = -1 + \sqrt{1+x}$
   a. Déterminer la monotonie de la fonction $g$ sur $\mathbb{R}^+$
   b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$ ; $g(x) \geq 0$ .
3) Calculer $(f\circ g)(x)$ et $(g\circ f)(x)$ ; $\forall x \in \mathbb{R}^+$ .
4) Représenter dans la même repère orthonormé $(C_f)$ et $(C_g)$

   Et la droite d'équation $y = x$ .

**Exercice 10**

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2\cos x - x$

1) a ) montrer pour tout $x$ de $I = [0;\pi]$ $-\pi - 2 \leq f(x) \leq 2$

   b) étudier la monotonie de la fonction $x \mapsto \cos x$ sur l'intervalle $I$ .

   c) déduire la monotonie de la fonction $f$ .
2) On pose : $g(x) = f(4x)$

   Etudier la monotonie de la fonction $g$ sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$
3) On pose : $h(x) = (2\cos x - x)^2$
   a. Déterminer une fonction $u$ vérifiant $h = u\circ f$ .
   b. Déterminer la monotonie de sur $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$.

# Chapitre 3

# *Barycentre dans le plan*

On se place dans le plan ou dans l'espace.

## I/ Barycentre de deux points

### a) Définition

**Théorème et définition**

Soient $A$ et $B$ deux points quelconques, $\alpha$ et $\beta$ deux réels.
Il existe un unique point $G$ du plan tel que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$ si et seulement si $\alpha+\beta\neq 0$.
Ce point est appelé barycentre du système de points pondérés $(A,\alpha);(B,\beta)$. On note $G=\text{Bar}\{(A,\alpha)\,;(B,\beta)\}$.

*Démonstration*

Quels que soient $\alpha$ et $\beta$ :

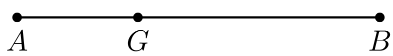
$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}\iff\alpha\overrightarrow{GA}+\beta(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{0}\iff\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}$$
$$\iff(\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}=-\beta\overrightarrow{AB}\iff(\alpha+\beta)\overrightarrow{AG}=\beta\overrightarrow{AB}$$

1/ Si $\alpha+\beta\neq 0$ alors l'équation équivaut à $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$.
Le point $G$ existe et est unique.

2/ Si $\alpha+\beta=0$ alors l'équation équivaut à $\beta\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}$.
Cette n'équation n'admet pas de solution si $A\neq B$ et $\beta\neq 0$ et en admet une infinité si $A=B$ ou $\beta=0$.

*Exemple : Deux points $A$ et $B$ étant donnés, placer $G=Bar\{(A,2)\,;(B,1)\}$.*

$$\begin{aligned}&G=\text{Bar}\{(A,2)\,;(B,1)\}\\&\iff 2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}\\&\iff 2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}\\&\iff 3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}\\&\iff \overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$



### b) Propriétés

Dans tout le paragraphe, $A$ et $B$ sont deux points quelconques, $\alpha$ et $\beta$ deux réels tels que $\alpha+\beta \neq 0$ et $G = \text{Bar}\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$

**Homogénéité**

**Propriété**

Soit $k$ un réel. Si $k \neq 0$ alors $G = \text{Bar}\{(A,k\alpha);(B,k\beta)\}$.

*Démonstration*

Si $k \neq 0$ alors :

$$G = \text{Bar}\{(A,\alpha);(B,\beta)\} \iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \iff k(\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}) = k\overrightarrow{0}$$
$$\iff k\alpha\overrightarrow{GA} + k\beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \iff G = \text{Bar}\{(A,k\alpha);(B,k\beta)\}$$

*Exemple : Démontrer que l'on peut exprimer $G$ comme barycentre de $A$ et $B$ de telle façon que la somme des coefficients soit égale à 1.*

Si $G = \text{Bar}\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ alors $G = \text{Bar}\left\{\left(A, \dfrac{1}{\alpha+\beta}\alpha\right);\left(B, \dfrac{1}{\alpha+\beta}\beta\right)\right\}$ car $\alpha+\beta \neq 0$.

On a ainsi $G = \text{Bar}\left\{\left(A, \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\right);\left(B, \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\right\}$ avec $\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} = 1$

**Position du barycentre**

**Propriété**

Si $A$ et $B$ sont distincts alors $G \in (AB)$. Autrement dit, $A$, $B$ et $G$ sont alignés.
Si, de plus, $\alpha$ et $\beta$ sont de même signe alors $G \in [AB]$.

*Démonstration*

$G = \text{Bar}\{(A,\alpha);(B,\beta)\} \iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$

Les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$ sont donc colinéaires et $G$, $A$ et $B$ sont alignés.

De plus, on a obtenu au cours de la première démonstration le résultat suivant :

$\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

or si $\alpha$ et $\beta$ sont de même signe alors $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$ est positif et inférieur à 1.

Ainsi $G \in [AB]$.

**Propriété**

Réciproquement, si $A \neq B$, tout point de la droite $(AB)$ est le barycentre de $A$ et $B$ affectés de coefficients bien choisis.

*Démonstration*

Si $M \in (AB)$ alors $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires donc il existe un réel $k$ tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.

On a alors :

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AM} - k\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{AM} - k(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) = \overrightarrow{0}$$
$$\iff \overrightarrow{AM} - k\overrightarrow{AM} - k\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0} \iff (k-1)\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$$

De plus, $k-1-k = -1 \neq 0$ donc $M = \text{Bar}\{(A,k-1);(B,-k)\}$.

### Isobarycentre

**Propriété**

Si $\alpha = \beta$, alors $G$ est appelé isobarycentre de $A$ et $B$. $G$ est alors le milieu du segment $[AB]$.

Démonstration immédiate

### Réduction vectorielle

**Propriété**

Quel que soit le point $M$, $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$.

*Démonstration*

Quel que soit le point $M$,

$$\begin{aligned}\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} &= \alpha(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + \beta(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) = \alpha\overrightarrow{MG} + \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{MG} + \beta\overrightarrow{GB} \\ &= (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG} + \underbrace{\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}}_{=\overrightarrow{0}} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}\end{aligned}$$

*Exemple : Soit $G = Bar\{(A,2);(B,5)\}$. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.*

L'égalité précédente pour $M = A$ donne $5\overrightarrow{AB} = 7\overrightarrow{AG}$. On a donc $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AB}$.

## c) Coordonnées du barycentre

**Propriété**

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan. Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$.
Si $G = \text{Bar}\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ alors $G\left(\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta};\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}\right)$
Dans un repère de l'espace, il suffit de faire le même calcul sur la troisième coordonnée.

*Démonstration*

Quel que soit le point $M$, on a $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$.
Cette égalité est donc valable en particulier pour $M = O$.
On a donc $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{OG}$ soit $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA} + \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}$

Les coordonnées de $\overrightarrow{OA}$ sont $\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ et les coordonnées de $\overrightarrow{OB}$ sont $\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$.

On en déduit que les coordonnées de $\overrightarrow{OG}$ sont $\begin{pmatrix}\frac{\alpha}{\alpha+\beta}x_A + \frac{\beta}{\alpha+\beta}x_B\\ \frac{\alpha}{\alpha+\beta}y_A + \frac{\beta}{\alpha+\beta}y_B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}\\ \frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}\end{pmatrix}$.

*Exemple : Dans un repère du plan, on a $A(3;-2)$ et $B(-1;4)$. Déterminer les coordonnées de $G$ barycentre de $(A,2);(B,3)$.*

On a :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{2\times x_A + 3\times x_B}{2+3} = \dfrac{2\times 3 + 3\times(-1)}{5} = \dfrac{2}{5} \\ y_G = \dfrac{2\times y_A + 3\times y_B}{2+3} = \dfrac{2\times(-2) + 3\times 4}{5} = \dfrac{8}{5}\end{cases}$$

Ainsi $G\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{8}{5}\right)$

## II/ Barycentre de trois points

Les définitions et propriétés du paragraphe précédent s'étendent au cas de trois points pondérés.

### a) Définition

**Théorème et définition**

Soient $A$, $B$ et $C$ trois points quelconques, $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ trois réels.
Il existe un unique point $G$ du plan tel que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$ si et seulement si $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.
Ce point est appelé barycentre du système de points pondérés $(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)$. On note $G=\text{Bar}\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$

*Démonstration*

Quels que soient $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ :

$$\begin{aligned}\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0} &\iff \alpha\overrightarrow{GA}+\beta(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})+\gamma(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{0}\\ &\iff \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{GA}+\gamma\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}\\ &\iff (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{GA}=-\beta\overrightarrow{AB}-\gamma\overrightarrow{AC}\\ &\iff (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{AG}=\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

1/ Si $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ alors l'équation équivaut à

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$

Le point $G$ existe et est unique.

2/ Si $\alpha+\beta+\gamma=0$ alors l'équation équivaut à $\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$.
Cette n'équation n'admet pas de solution si $\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}\neq\overrightarrow{0}$ et en admet une infinité si $\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$.

### b) Associativité du barycentre

**Propriété**

Soient $A$, $B$ et $C$ trois points, $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ trois réels tels que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ et $\alpha+\beta\neq 0$.

$$\text{Si }\begin{cases}G=\text{Bar}\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}\\ H=\text{Bar}\{(A,\alpha);(B,\beta)\}\end{cases}\quad\text{alors}\quad G=\text{Bar}\{(H,\alpha+\beta);(C,\gamma)\}$$

*Démonstration*

Supposons que $\begin{cases} G = \text{Bar}\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\} \\ H = \text{Bar}\{(A,\alpha);(B,\beta)\} \end{cases}$

On a alors :

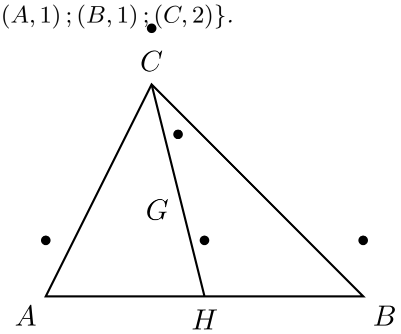
$$(\alpha+\beta)\overrightarrow{GH} + \gamma\overrightarrow{GC} = \alpha\overrightarrow{GH} + \beta\overrightarrow{GH} + \gamma\overrightarrow{GC} = \alpha\overrightarrow{GA} + \alpha\overrightarrow{AH} + \beta\overrightarrow{GB} + \beta\overrightarrow{BH} + \gamma\overrightarrow{GC}$$
$$= \underbrace{\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC}}_{=\overrightarrow{0}} + \underbrace{\alpha\overrightarrow{AH} + \beta\overrightarrow{BH}}_{=\overrightarrow{0}} = \overrightarrow{0}$$

Conclusion :

$$G = \text{Bar}\{(H,\alpha+\beta);(C,\gamma)\}$$

*Exemple : Trois points $A$, $B$ et $C$ étant donnés, placer $G = Bar\{(A,1);(B,1);(C,2)\}$.*

Posons $H = \text{Bar}\{(A,1);(B,1)\}$. $H$ est donc le milieu de $[AB]$.
D'après la propriété d'associativité, $G = \text{Bar}\{(H,2);(C,2)\}$.
$G$ est donc le milieu de $[CH]$.




### c) Propriétés

Dans tout le paragraphe, $A$, $B$ et $C$ sont trois points quelconques, $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ trois réels tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ et $G = \text{Bar}\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$

#### Homogénéité

**Propriété**

Soit $k$ un réel. Si $k \neq 0$ alors $G = \text{Bar}\{(A,k\alpha);(B,k\beta);(C,k\gamma)\}$.

*Démonstration*

Si $k \neq 0$ alors :

$$\begin{aligned} G = \text{Bar}\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\} &\iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \\ &\iff k(\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC}) = k\overrightarrow{0} \\ &\iff k\alpha\overrightarrow{GA} + k\beta\overrightarrow{GB} + k\gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \\ &\iff G = \text{Bar}\{(A,k\alpha);(B,k\beta);(C,k\gamma)\} \end{aligned}$$

#### Position du barycentre

**Propriété**

Si $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés alors $G \in (ABC)$. Autrement dit, $A$, $B$, $C$ et $G$ sont coplanaires.

*Démonstration*

$G = \text{Bar}\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\} \iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$
Les vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ sont donc coplanaires. Ainsi les points $A$, $B$, $C$ et $G$ sont coplanaires.

**Propriété**

Réciproquement, si $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés, alors tout point du plan $(ABC)$ est le barycentre de $A$, $B$ et $C$ affectés de coefficients bien choisis.

*Démonstration*

Si $M \in (ABC)$ alors il existe des réels $k$ et $k'$ tel que :

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + k'\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AM} + k\overrightarrow{MB} + k'\overrightarrow{AM} + k'\overrightarrow{MC}$$

On a alors $(1-k-k')\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} + k'\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$
donc $M = \text{Bar}\,\{(A, 1-k-k')\,;(B,k)\,;(C,k')\}$.

### Isobarycentre

**Propriété**

Si $\alpha = \beta = \gamma$, alors $G$ est appelé isobarycentre de $A$, $B$ et $C$. $G$ est alors le centre de gravité du triangle $ABC$.

*Démonstration*

Soient $I$ le milieu de $[BC]$ et $J$ le milieu de $[AC]$.
On a alors $I = \text{Bar}\,\{(B,1)\,;(C,1)\}$ et $J = \text{Bar}\,\{(A,1)\,;(C,1)\}$.
D'après la propriété d'associativité, on a, d'une part, $G = \text{Bar}\,\{(I,2)\,;(A,1)\}$ donc $G \in (AI)$ et, d'autre part, $G = \text{Bar}\,\{(J,2)\,;(B,1)\}$ donc $G \in (BJ)$.
$G$ appartient donc à deux médianes de $ABC$.
$G$ est le centre de gravité de $ABC$.

### Réduction vectorielle

**Propriété**

Quel que soit le point $M$, $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$.

*Démonstration*

Quel que soit le point $M$,

$$\begin{aligned}
\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} &= \alpha(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + \beta(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + \gamma(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) \\
&= \alpha\overrightarrow{MG} + \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{MG} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{MG} + \gamma\overrightarrow{GC} \\
&= (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG} + \underbrace{\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC}}_{=\overrightarrow{0}} \\
&= (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}
\end{aligned}$$

## d) Coordonnées du barycentre

**Propriété**

Soit $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère du plan. Soit $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ et $C(x_C; y_C)$.
Si $G = \text{Bar}\,\{(A,\alpha)\,;(B,\beta)\,;(C,\gamma)\}$ alors $G\left(\dfrac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}; \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$
Dans un repère de l'espace, il suffit de faire le même calcul sur la troisième coordonnée.

La démonstration est identique au cas de deux points.

*Exemple : Dans un repère du plan, on a $A(2;-1)$, $B(0;3)$ et $C(-2;0)$. Déterminer les coordonnées de $G$ barycentre de $(A,1);(B,3);(C,-2)$.*

On a :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + 3\times x_B - 2\times x_C}{1+3-2} = \dfrac{2+3\times 0 - 2\times(-2)}{2} = 3 \\ y_G = \dfrac{y_A + 3\times y_B - 2\times y_C}{1+3-2} = \dfrac{-1+3\times 3 - 2\times 0}{2} = 4 \end{cases}$$

Ainsi $G(3;4)$

## III/ Barycentre d'un nombre quelconque de points

Toutes les définitions et propriétés précédentes se généralisent à $n$ points pondérés.

- Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ $n$ points et $a_1, a_2, \dots, a_n$ $n$ réels.
  Il existe un unique point $G$ tel que $a_1\overrightarrow{GA_1} + a_2\overrightarrow{GA_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $a_1 + a_2 + \cdots a_n \neq 0$.
  Ce point est appelé barycentre des $n$ points pondérés $(A_1, a_1); (A_2, a_2); \dots; (A_n, a_n)$.
- Règle d'associativité :
  Pour trouver le barycentre $G$, de $n$ points, lorsque $n \geqslant 3$, on peut remplacer $p$ points, pris parmi les $n$ points, par leur barycentre (s'il existe) affecté de la somme de leurs coefficients.
- Soit $k \neq 0$.
  $G = \mathrm{Bar}(A_1, a_1), (A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n) \Longleftrightarrow G = \mathrm{Bar}(A_1, ka_1), (A_2, ka_2), \dots, (A_n, ka_n)$.
  Autrement dit, on ne change pas le barycentre en changeant les coefficients par des coefficients proportionnels.
- Si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n \neq 0$ alors $G$ est appelé isobarycentre des $n$ points $A_1, A_2, \dots, A_n$.
- Pour tout point $M$,
  $$a_1\overrightarrow{MA_1} + a_2\overrightarrow{MA_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{MA_n} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\overrightarrow{MG}$$
- Dans un repère, le barycentre de $n$ points pondérés a pour coordonnées la moyenne des coordonnées des $n$ points pondérés par les $n$ coefficients.
  Dans le cas d'un repère du plan, on obtient :
  $$\begin{cases} x_G = \dfrac{a_1 x_{A_1} + a_2 x_{A_2} + \cdots + a_n x_{A_n}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \\ y_G = \dfrac{a_1 y_{A_1} + a_2 y_{A_2} + \cdots + a_n y_{A_n}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \end{cases}$$

# *Exercices*

**Introduction et barycentres de deux points.**

**Exercice 1.**

On considère un triangle ABC. On appelle I le milieu de [BC].

Démontrer que $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

**Exercice 2.**

A et B sont deux points distincts. N est le point défini par la relation $\overrightarrow{NA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NB}$.

1) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires.
2) Placer le point N sur une figure.
3) Exprimer N comme barycentre des points A et B.

**Exercice 3.**

ABCD est un parallélogramme de centre O. Les points M et N sont tels que :

$3\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ (1) et $\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{DN} = \vec{0}$ (2).

1) Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ en utilisant (1). Placer M.
2) Trouver les réels $\alpha$ et $\beta$ pour que M soit barycentre des points pondérés (A, $\alpha$) et (B, $\beta$).
3) Exprimer $\overrightarrow{CN}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$ en utilisant (2). Placer N.
4) Trouver les réels $\alpha$ ' et $\beta$ ' pour que N soit barycentre des points pondérés (C, $\alpha$ ') et (D, $\beta$ ').
5) Justifier que le quadrilatère NCMA est un parallélogramme et que O est le milieu de [MN].

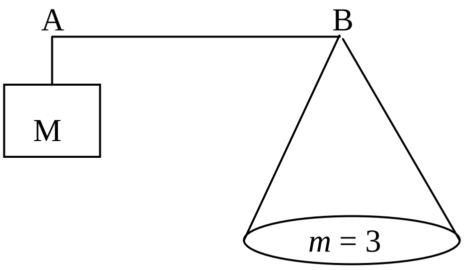
**Exercice 4.**

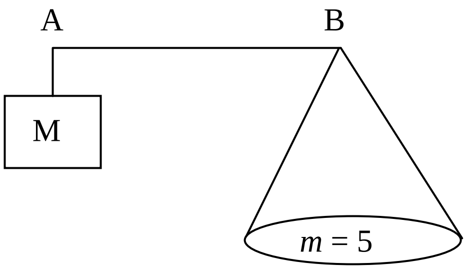
B est le milieu de [AC].
Démontrer que le barycentre de (A, 1) (C, 3) est confondu avec celui de (B, 2) (C, 2).

**Exercice 5.**

Une balance est constituée d'une masse M et d'un plateau fixé à l'extrémité d'une tige. Pour peser une masse *m*, le vendeur place, à une position précise, un crochet sur la tige. Cette balance a l'avantage, pour le commerçant, de ne pas manipuler plusieurs masses.

1) Pour chacun des cas suivants, où faut-il fixer le crochet G sur le segment [AB] pour réaliser l'équilibre ? (M = 2 kg)




2) Le point G est tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Quelle est la masse *m* pesée ? (Données : M = 2 kg)

**Exercice 6.**

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que BC = 8 cm et BA = 5 cm. Soit I le milieu de [BC].

1) Placer le point F tel que $\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{BA}$ et montrer que F est le barycentre des points A et B pondérés par des réels que l'on déterminera.

2) P étant un point du plan, réduire (en justifiant) chacune des sommes suivantes :

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{PB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PC}$$
$$-\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB}$$
$$2\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PA}$$

3) Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan vérifiant :

$$\left\|\frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\|.$$

4) et représenter l'ensemble des points N du plan vérifiant :

$$\left\|\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{NB} - 2\overrightarrow{NA}\right\|.$$

**Barycentres de trois points et plus.**

**Exercice 7. Le centre de gravité comme isobarycentre.**

ABC est un triangle, A' est le milieu de [BC]. On se propose de démontrer la propriété :

« G est le centre de gravité du triangle ABC » équivaut à « $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ».

1) Quelle égalité vectorielle entre $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GA'}$ caractérise le centre de gravité G ?

2) a) Prouver que $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA'}$.

b) En déduire la propriété énoncée au début de l'exercice.

3) a) Quelle interprétation cette propriété peut-on donner en physique ?

b) Traduire l'égalité $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ en terme de barycentre.

**Exercice 8.**

Soit ABCD un carré et K le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, – 1), (C, 2) et (D, 1).
On note I le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, – 1) et J celui de (C, 2) et (D, 1).

1) Placer I et J en justifiant.

2) Réduire l'écriture des vecteurs suivants : $2\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KB}$ et $2\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD}$.

En déduire que K est le barycentre de (I, 1) et (J, 3).

3) Placer K en justifiant.

**Exercice 9.**

On considère un triangle ABC et l'on désigne par G le barycentre de (A, 1), (B, 4) et (C, – 3).

1) Construire le barycentre I de (B, 4) et (C, – 3).

2) Démontrer que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GI} = \vec{0}$. En déduire la position de G sur (AI).

**Exercice 10.**

ABC est un triangle. On note G le barycentre de (A, 2), (B, 1) et (C, 1). Le but de l'exercice est de déterminer la position précise du point G.

1) Soit I le milieu de [BC]. Démontrer que $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.

2) En déduire que G est le barycentre de A et I munis de coefficients que l'on précisera.

3) Conclure.

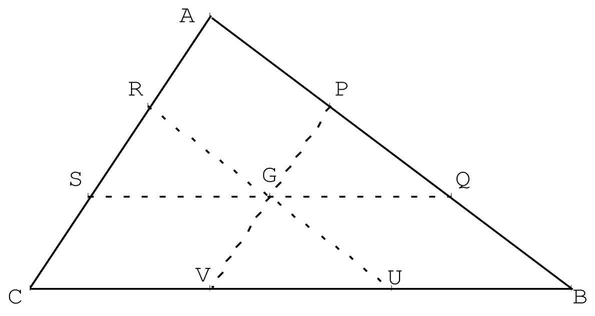
**Exercice 11.**
1) Placer dans un repère les points A (1, 2), B (– 3, 4) et C (– 2, 5).
Soit G le barycentre des points pondérés (A, 3), (B, 2) et (C, – 4).
2) Quelles sont les coordonnées de G ? Placer G.
3) La droite (BG) passe t-elle par l’origine du repère ? Justifier.

**Exercice 12.**
ABC est un triangle. Soit G le barycentre de (A, 1), (B, 3) et (C, – 3).
Démontrer que les droites (AG) et (BC) sont parallèles.

**Exercice 13.**
ABC est un triangle. On considère le barycentre A’ de (B, 2) et (C, – 3), le barycentre B’ de (A, 5) et (C, – 3) ainsi que le barycentre C’ de (A, 5) et (B, 2).
Démontrer que les droites (AA’), (BB’) et (CC’) sont concourantes.
Indication : on pourra considérer le barycentre G de (A, 5), (B, 2) et (C, – 3).

**Exercice 14.**
ABC est un triangle de centre de gravité G.
On définit les points P, Q, R, S, U, V par :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \;,\; \overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \;,\; \overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \;,\; \overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \;,\; \overrightarrow{BU} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \;,\; \overrightarrow{BV} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$




1) Démontrer que P est le barycentre de (A, 2) et (B, 1) et que V est barycentre de (C, 2) et (B, 1).
2) En déduire que G est le milieu de [PV].
3) On démontre, de même, que G est le milieu de [RU] et de [SQ] (inutile de refaire les calculs).
Démontrer que RPUV est un parallélogramme.

**Exercice 15.**
Soit ABC un triangle et G un point vérifiant : .
Le point G est-il barycentre des points pondérés (A, 5), (B, 1) et (C, 3) ? Justifier.

$$\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

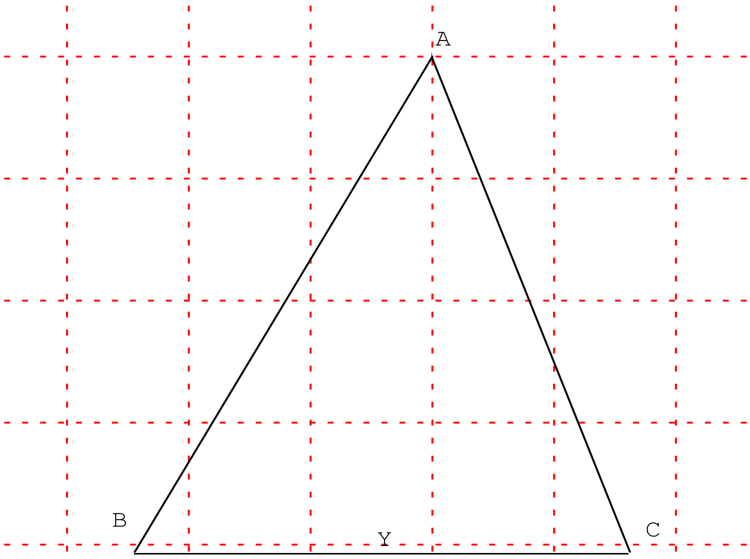
**Exercice 16.**
ABCD est un carré.
1) Quel est l’ensemble E des points M du plan tels que $\left\| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\|$ = AB ?
2) Représenter cet ensemble E.

**Exercice 17.**
ABCD est un quadrilatère et G est le barycentre de (A, 1), (B, 1) (C, 3) (D, 3).
Construire le point G et expliquer votre construction.

**Exercice 18.**
Dans le triangle ABC, E est le milieu de [AB] et G est le barycentre de (A, – 2), (B, – 2), (C, 15).
Démontrer que G, C, et E sont alignés.

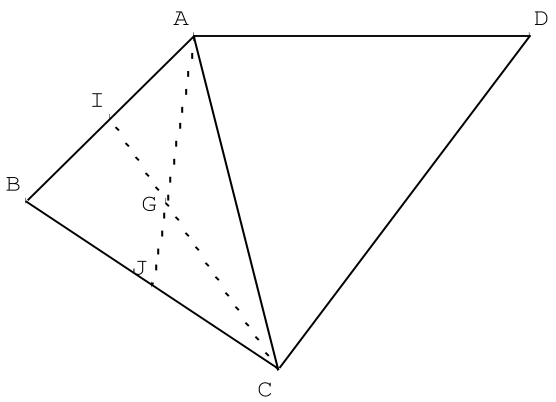
**Exercice 19.**
ABCD est un quadrilatère. On note G son isobarycentre. Le but de cet exercice est de préciser la position du point G.
1) On note I le milieu de [AC] et J le milieu de [BD]. Démontrer que G est le barycentre de I et J munis de coefficients que l'on précisera.
2) Conclure et faire une figure.
3) Si ABCD est un parallélogramme, préciser la position du point G.

**Exercice 20.**
ABC est le triangle donné ci-dessous. Y est le milieu de [BC].
1) Placer, en justifiant, le barycentre U de (A, 4) et (C, 1).
Puis placer le barycentre E de (A, 4) et (B, 1).
2) Soit G le barycentre de (A, 4), (B, 1) et (C, 1). Montrer que G est le barycentre de (E, 5) et (C, 1).
3) Démontrer que les droites (EC), (AY) et (BU) sont concourantes.



**Exercice 21.**
ABCD est un quadrilatère.
G est le centre de gravité du triangle ABC.
I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [BC].
L est le barycentre de (A, 1) et (D, 3).
K est le barycentre de (C, 1) et (D, 3).

Le but de l'exercice est de démontrer que
les droites (IK), (JL) et (DG) sont concourantes.




Pour cela, on utilise le barycentre H de (A, 1), (B, 1), (C, 1) et (D, 3).

1) Placer en justifiant, les points L et K.
2) Démontrer que H est le barycentre de G et D munis de coefficients que l'on précisera.
3) Démontrer que H est le barycentre de J et L munis de coefficients que l'on précisera.
4) Démontrer que H est le barycentre de I et K munis de coefficients que l'on précisera.
5) Conclure.

**Exercice 22. La droite d'Euler.**
On considère un triangle ABC et A' le milieu de [BC]. On note O le centre du cercle circonscrit à ce triangle. On considère le point H défini par $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ [1].
1) Montrer que $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$ [2].
2) Déduire des deux relations [1] et [2] que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$.
3) En déduire que H appartient à la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
On admet, que de la même manière, on peut démontrer que le point H appartient aux deux autres hauteurs du triangle ABC.
4) Reconnaître le point H.
5) Soit G le centre de gravité du triangle ABC.
Montrer que O, G et H sont alignés et que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ .

**Barycentres dans l'espace.**

**Exercice 23.**
Pour cet exercice, une figure est recommandée.
ABCDE est une pyramide à base carrée BCDE.
Soit G l'isobarycentre de A, B, C, D et E.
On note O le centre du carré BCDE (c'est-à-dire l'intersection des diagonales (CE) et (BD)).
1) Démontrer que O est l'isobarycentre de BCDE.
2) Démontrer que G est le barycentre de (O, 4) et (A, 1).
3) Soit $G_1$ le centre de gravité du triangle ABE et I le milieu de [CD]. Démontrer que $G \in (G_1 I)$.

**Exercice 24.**
Pour cet exercice, une figure est recommandée.
ABCD est un tétraèdre et G est le barycentre de (A, 4), (B, 1), (C, 1) et (D, 1).
On note H le centre de gravité du triangle BCD (c'est-à-dire H est l'isobarycentre de B, C, D).
1) Démontrer que G est le barycentre de (H, 3) et (A, 4).
2) Situer le point G sur la droite (AH).

# *Correction des exercices*

## Introduction et barycentres de deux points.

### Exercice 1.

On considère un triangle ABC. On appelle I le milieu de [BC]. Démontrons que $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{AI} + \underbrace{\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}}_{\vec{0}} = 2\overrightarrow{AI}.$$

**Exercice 2.** A et B sont deux points distincts. N est le point défini par la relation $\overrightarrow{NA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NB}$.

1) Démontrons que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires. Exprimons $\overrightarrow{AN}$ en fonction $\overrightarrow{AB}$ :

$$\overrightarrow{NA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NB} \Leftrightarrow \overrightarrow{NA} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{NA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{NA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{NA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\overrightarrow{NA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \frac{3}{2}\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

2) Pour placer le point N, on divise le segment [AB] en trois parties égales et on place N…

3) Comme $\overrightarrow{NA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NB}$ alors $\overrightarrow{NA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{NB} = \vec{0}$ donc N est le barycentre de (A, 1) et (B, $\frac{1}{2}$).

Ou encore $2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} = \vec{0}$ alors N est le barycentre de (A, 2) et (B, 1).

**Exercice 3.** ABCD est un parallélogramme de centre O. Les points M et N sont tels que :

$$3\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0} \quad (1) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{DN} = \vec{0} \quad (2).$$

1) Exprimons $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ en utilisant (1).

$3\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Ce qui permet de placer M.

2) Comme $3\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ alors $3\overrightarrow{AM} - 2(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) = \vec{0}$ puis $3\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Donc $\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Ainsi $\alpha = 1$ et $\beta = 2$ pour que M soit barycentre des points pondérés (A, $\alpha$) et (B, $\beta$).

3) Exprimons $\overrightarrow{CN}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$ en utilisant (2).

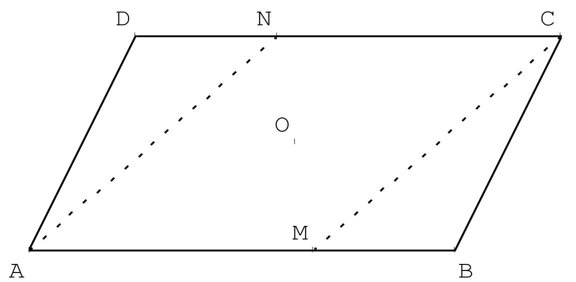
$$\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{DN} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} + 3(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{DC} + 3\overrightarrow{CN} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} - 3\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{CN} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{CN} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}.$$

4) Comme $\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{DN} = \vec{0}$ alors $(\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{ND}) + 3\overrightarrow{DN} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{CN} - \overrightarrow{DN} + 3\overrightarrow{DN} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{CN} + 2\overrightarrow{DN} = \vec{0}$,

donc $\overrightarrow{NC} + 2\overrightarrow{ND} = \vec{0}$.

Ainsi $\alpha' = 1$ et $\beta' = 2$ pour que N soit barycentre des points pondérés (C, $\alpha'$) et (D, $\beta'$).



5) Justifions que le quadrilatère NCMA est un parallélogramme et que O est le milieu de [MN].

$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ donc $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{NC}$.

Comme $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$ alors NCMA est un parallélogramme. Les diagonales [MN] et [AC] ont le même milieu. Comme O est le milieu de [AC] alors O est aussi le milieu de [MN].

**Exercice 4.** B est le milieu de [AC]. Démontrons que le barycentre G de (A, 1) (C, 3) est le barycentre H de (B, 2) (C, 2). Comme G est le barycentre de (A, 1) et (C, 3) alors $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (*).

Donc $\overrightarrow{GA} + 3(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$ puis $4\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ soit $3\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AG}$ d'où $\frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG}$.

Comme H est le barycentre de (B, 2) et (C, 2) alors $2\overrightarrow{HB} + 2\overrightarrow{HC} = \vec{0}$ (H est le milieu de [BC]).

Donc $2(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}) + 2(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$ puis $4\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ donc $4\overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ et

$\frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}$. Comme $\frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG}$ et $\frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}$ alors $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AH}$.

Autre solution.

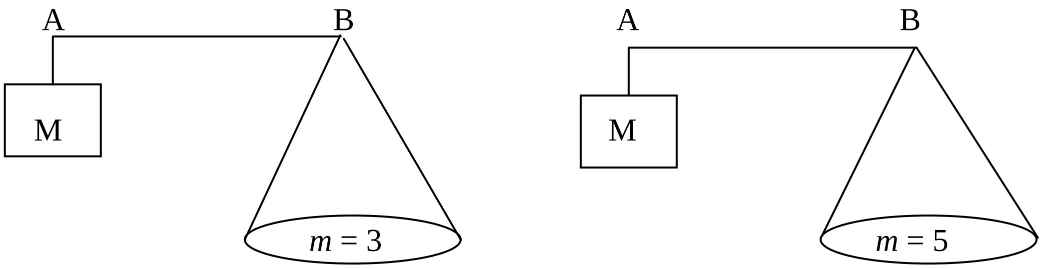
Comme H est le barycentre de (B, 2) (C, 2), alors H est le milieu de [BC], donc $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Comme G est le barycentre de (A, 1) et (C, 3) alors $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$, puis $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BA} + 3(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BC}) = \vec{0}$, donc $4\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{BC} + \underbrace{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}}_{\vec{0}} = \vec{0}$, donc $4\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$ puis $4\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Donc $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BG}$, les points $G$ et $H$ sont confondus.

**Exercice 5.** Une balance est constituée d'une masse M et d'un plateau fixé à l'extrémité d'une tige. Pour peser une masse *m*, le vendeur place, à une position précise, un crochet sur la tige. Cette balance a l'avantage, pour le commerçant, de ne pas manipuler plusieurs masses.

1) Pour chacun des cas suivants, où faut-il fixer le crochet G sur le segment [AB] pour réaliser l'équilibre ? (M = 2 kg)




D'après le principe des leviers $M\overrightarrow{GB} + m\overrightarrow{GA} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{AG} = \frac{m}{m+M}\overrightarrow{AB}$.

Donc $2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GA} = \vec{0}$ puis $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ (situation 1, *m* = 3 et M = 2).

Donc $2\overrightarrow{GB} + 5\overrightarrow{GA} = \vec{0}$ puis $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AB}$ (situation 2, *m* = 5 et M = 2).

2) Le point G est tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Quelle est la masse *m* pesée ? (Données : M = 2 kg)

$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{GB} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

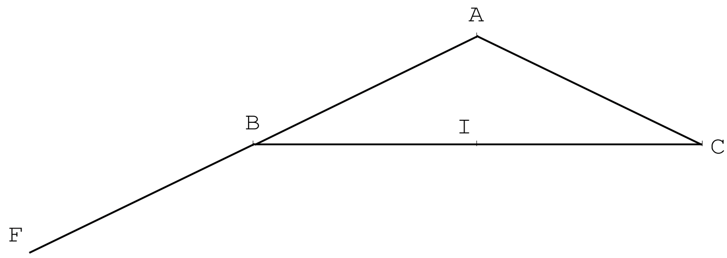
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. D'après le principe des leviers ($M\overrightarrow{GB} + m\overrightarrow{GA} = \vec{0}$) on a donc *m* = 4.

**Exercice 6.** Soit ABC un triangle isocèle en A tel que BC = 8 cm et BA = 5 cm, I le milieu de [BC].

1) Comme $\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{BA}$ (ou $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB}$), B est le milieu de [AF].

Donc $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ puis $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$ et $2\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$ soit $2\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{AF} = \vec{0}$.

On en déduit que $\frac{F}{1} = \text{bar}\left(\frac{B}{2}\middle|\frac{A}{-1}\right)$.




2) P étant un point du plan, réduire (en justifiant) chacune des sommes suivantes :

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{PB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{PI} \quad \text{(identité du parallélogramme).}$$

$$-\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PF} \quad \text{car } \frac{F}{1} = \text{bar}\left(\frac{B}{2}\middle|\frac{A}{-1}\right).$$

$$2\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{PB} = 2(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB}) = 2\overrightarrow{AB}.$$

3) Déterminons l'ensemble des points M du plan vérifiant :

$$\left\|\frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\|.$$

Donc $\left\|\overrightarrow{MI}\right\| = \left\|\overrightarrow{MF}\right\|$ (d'après ce qui précède).

L'ensemble des points M vérifiant cette relation est donc la médiatrice de [IF].

4) Déterminons l'ensemble des points N du plan vérifiant :

$$\left\|\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{NB} - 2\overrightarrow{NA}\right\|.$$

Donc $\left\|2\overrightarrow{NI}\right\| = \left\|2\overrightarrow{AB}\right\|$ d'après la question 2).

L'ensemble des points M est le cercle de centre I et de rayon AB.

**Barycentres de trois points et plus.**

**Exercice 7. Le centre de gravité comme isobarycentre.**

ABC est un triangle, A' est le milieu de [BC]. On se propose de démontrer la propriété :

« G est le centre de gravité du triangle ABC » équivaut à « $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ».

1) L'égalité vectorielle $2\overrightarrow{GA'} = -\overrightarrow{GA}$ caractérise le centre de gravité G.

2) a) Prouvons que $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA'}$.

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'C} = 2\overrightarrow{GA'} + \underbrace{\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C}}_{\vec{0}} = 2\overrightarrow{GA'}.$$

b) On en déduit la propriété énoncée au début de l'exercice :

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA'} \Leftrightarrow \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

3) a) Un triangle est tenu en équilibre sur une pointe à condition que celle-ci soit au centre de gravité.

b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow$ G est l'isobarycentre des points A, B, C

$\Leftrightarrow$ G est barycentre des points (A, 1) (B, 1) (C, 1).

**Exercice 8.** ABCD est un carré et K le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, – 1), (C, 2) (D, 1).

1) I est le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, – 1)

$$2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \quad 2\overrightarrow{IA} - (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow \quad 2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AI}$. Ce qui permet de placer le point I (A est le milieu de [IB]).

J est le barycentre des points pondérés (C, 2) et (D, 1)

$$2\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0} \Leftrightarrow \quad 2\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CD} = \vec{0} \Leftrightarrow \quad 3\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CD} = \vec{0} \Leftrightarrow \quad 3\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}.$$

Ce qui permet de placer le point J.

2) Réduisons l'écriture des vecteurs suivants : $2\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KB}$ et $2\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD}$.

$2\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KB} = \overrightarrow{KI}$ car I est le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, – 1).

$2\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = 3\overrightarrow{KJ}$ car J est le barycentre des points pondérés (C, 2) et (D, 1)

Comme K est le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, – 1), (C, 2) (D, 1) alors

$\underbrace{2\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KB}}_{\overrightarrow{KI}} + \underbrace{2\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD}}_{3\overrightarrow{KJ}} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{KI} + 3\overrightarrow{KJ} = \vec{0}$.

Ainsi K est le barycentre de (I, 1) et (J, 3).

3) Pour construire le point K, on place d'abord I (sachant que I est le symétrique de B par rapport à A) puis on place J (sachant que $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$). Pour finir on utilise :

$$\overrightarrow{KI} + 3\overrightarrow{KJ} = \vec{0} \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{KI} + 3(\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{IJ}) = \vec{0} \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{KI} + 3\overrightarrow{KI} + 3\overrightarrow{IJ} = \vec{0} \Leftrightarrow \quad 4\overrightarrow{KI} + 3\overrightarrow{IJ} = \vec{0}$$

$4\overrightarrow{IK} = 3\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{IK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{IJ}$, ce qui permet de placer le point K.

**La méthode est à retenir :**

Pour placer le barycentre de 4 points (A, $\alpha$), (B, $\beta$), (C, $\gamma$) (D, $\delta$) :

On construit d'abord I le barycentre de (A, $\alpha$) (B, $\beta$) et J le barycentre de (C, $\gamma$) (D, $\delta$).

Puis on construit K le barycentre de (I, $\alpha + \beta$) et (J, $\gamma + \delta$).

**Exercice 9.** On désigne par G le barycentre de (A, 1), (B, 4) et (C, – 3).

1) I est le barycentre des points (B, 4) et (C, – 3) donc $4\overrightarrow{IB} - 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ puis $4\overrightarrow{IB} - 3(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC}) = \vec{0}$.

Donc $4\overrightarrow{IB} - 3\overrightarrow{IB} - 3\overrightarrow{BC} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{IB} - 3\overrightarrow{BC} = \vec{0}$ d'où $\overrightarrow{BI} = 3\overrightarrow{CB}$.

Cette relation permet de construire le point I sans problème.

2) G est le barycentre des points (A, 1), (B, 4) et (C, – 3) donc par associativité du barycentre G est aussi barycentre des points (A, 1) et (I, 1). Cela entraîne que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GI} = \vec{0}$.

Autrement dit, G est le milieu de [AI].

**Exercice 10.** ABC est un triangle. On note G le barycentre de (A, 2), (B, 1) et (C, 1). Le but de l'exercice est de déterminer la position précise du point G.

1) Soit I le milieu de [BC], on a $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{GI} + \underbrace{\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}}_{\vec{0}} = 2\overrightarrow{GI}$.

2) G le barycentre des points (A, 2), (B, 1) et (C, 1) donc $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Comme $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$, on a donc $2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GI} = \vec{0}$. Ainsi G est barycentre des points (A, 2) et (I, 2).

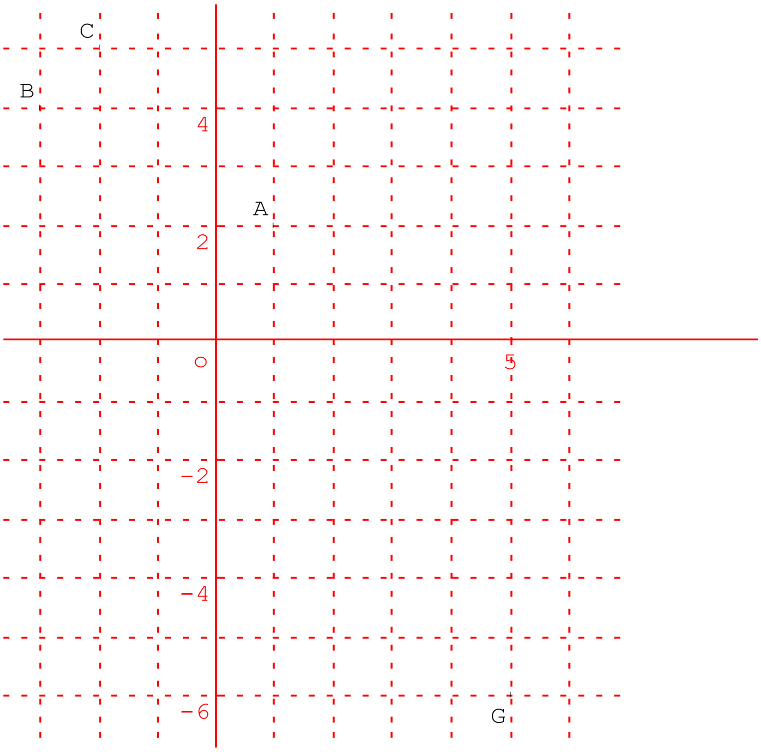
3) Ceci montre que G est le milieu de [AI].

Autre raisonnement possible : I le milieu de [BC] donc I est le barycentre des points (B, 1) et (C, 1).

Comme G est le barycentre des points (A, 2), (B, 1) et (C, 1), on en déduit par associativité du barycentre, que G est barycentre des points (A, 2) et (I, 2). Donc G est le milieu de [AI].

**Exercice 11.**

1) Plaçons dans un repère les points A (1, 2), B (– 3, 4) et C (– 2, 5).




Soit G le barycentre des points pondérés (A, 3), (B, 2) et (C, – 4).

2) Les coordonnées de G sont données par les formules :

$$x_G = \frac{3x_A + 2x_B - 4x_C}{3+2-4} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{3y_A + 2y_B - 4y_C}{3+2-4}.$$

$$x_G = \frac{3\times 1 + 2\times(-3) - 4\times(-2)}{3+2-4} = 3-6+8=5 \quad \text{et} \quad y_G = \frac{3\times 2 + 2\times 4 - 4\times 5}{3+2-4} = 6+8-20=-6.$$

On place alors le point G.

3) On a $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix}5\\-6\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OG}$ ne sont donc pas colinéaires.

Les points O, B et g ne sont pas alignés et la droite (BG) ne passe pas par l'origine du repère.

**Exercice 12.** ABC est un triangle. Soit G le barycentre de (A, 1), (B, 3) et (C, – 3).

Comme G est barycentre des points (A, 1), (B, 3) et (C, – 3) alors $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Donc $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{CG} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ puis $\overrightarrow{GA} + 3(\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GB}) = \vec{0}$ soit $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{CB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{CB}$.

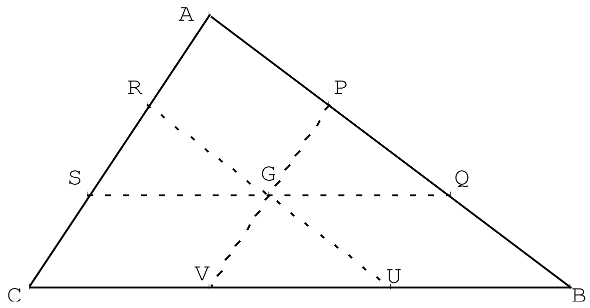
Ceci montre que les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires. Donc les droites (AG) et (BC) sont parallèles.

**Exercice 13.** ABC est un triangle. On considère le barycentre A' de (B, 2) et (C, – 3), le barycentre B' de (A, 5) et (C, – 3) ainsi que le barycentre C' de (A, 5) et (B, 2).

- Considérons G le barycentre des points (A, 5), (B, 2) et (C, – 3). Comme A' est le barycentre des points (B, 2) et (C, – 3), par associativité du barycentre, G est aussi le barycentre des points (A, 5) et (A', – 1). Ceci prouve que les points A, G et A' sont alignés.
- G est le barycentre des points (A, 5), (B, 2) et (C, – 3). Comme B' est le barycentre des points (A, 5) et (C, – 3), par associativité du barycentre, G est aussi le barycentre des points (B', 2) et (B, 2). Ceci prouve que les points B, G et B' sont alignés.
- G est le barycentre des points (A, 5), (B, 2) et (C, – 3). Comme C' est le barycentre des points (A, 5) et (B, 2), par associativité du barycentre, G est aussi le barycentre des points (C', 7) et (C, – 3). Ceci prouve que les points B, G et B' sont alignés. Donc les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

**Exercice 14.** ABC est un triangle de centre de gravité G.
On définit les points P, Q, R, S, U, V par :

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{AQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{AR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC},\quad \overrightarrow{AS}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC},\quad \overrightarrow{BU}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC},\quad \overrightarrow{BV}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$




1) $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $3\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}$ et $3\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}$ puis $2\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}=\vec{0}$, donc $\frac{P}{3}=\text{bar}\begin{pmatrix}A & B\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{BV}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ donc $3\overrightarrow{BV}=2\overrightarrow{BC}$ et $3\overrightarrow{BV}=2(\overrightarrow{BV}+\overrightarrow{VC})$ puis $\overrightarrow{BV}=2\overrightarrow{VC}$ et $2\overrightarrow{VC}+\overrightarrow{VB}=\vec{0}$. Donc $\frac{V}{3}=\text{bar}\begin{pmatrix}C & B\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

2) On a $\frac{G}{6}=\text{bar}\begin{pmatrix}A & B & C\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$. Comme $\frac{P}{3}=\text{bar}\begin{pmatrix}A & B\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ et $\frac{V}{3}=\text{bar}\begin{pmatrix}C & B\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, l'associativité du barycentre donne $\frac{G}{6}=\text{bar}\begin{pmatrix}P & V\\ 3 & 3\end{pmatrix}$. On en déduit que G est le milieu de [PV].

3) On démontre, de même, que G est le milieu de [RU] et de [SQ] (inutile de refaire les calculs).
G est le milieu de [RU] et de [PV] donc RPUV est un parallélogramme.

**Exercice 15.** Soit ABC un triangle et G un point vérifiant : $\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

On a $\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ donc $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}-4\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Ainsi $-5\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ et $5\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ donc $\frac{G}{9}=\text{bar}\begin{pmatrix}A & B & C\\ 5 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

Donc le point G est le barycentre des points pondérés (A, 5), (B, 1) et (C, 3).

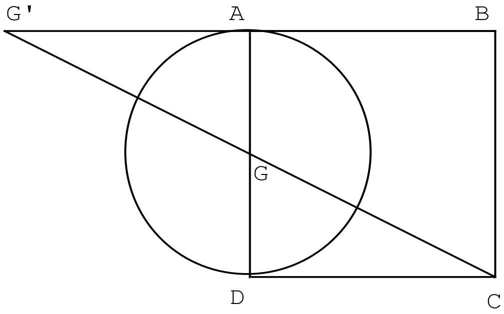
**Exercice 16.** ABCD est un carré.

1) Notons $\frac{G}{2}=\text{bar}\begin{pmatrix}A & B & C\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$, on a, pour tout point M du plan $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG}$.

Donc $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=AB \Leftrightarrow \left\|2\overrightarrow{MG}\right\|=AB \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MG}\right\|=\frac{AB}{2}$.

L'ensemble E des points M du plan tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=AB$ est donc le cercle de centre G et de rayon $\frac{AB}{2}$.

2) Représentons cet ensemble E.
Pour construire G, on commence par construire G' le barycentre des points (A, 2) et (B, – 1).
Puis par associativité du barycentre, g est le barycentre des points (G', 1) et (C, 1) donc le milieu de [CG'].




**Exercice 17.** ABCD est un quadrilatère et G est le barycentre de (A, 1), (B, 1) (C, 3) (D, 3).
Plusieurs constructions sont possibles. Par exemple, on construit le milieu I de [AB] qui est le barycentre de (A, 1) et (B, 1). Puis on construit le milieu J de [CD] qui est le barycentre de (C, 3) et (D, 3). Par associativité du barycentre, le point G est alors le barycentre de (I, 2) et (J, 6). Donc le point G vérifie la relation $2\overrightarrow{GI}+6\overrightarrow{GJ}=\vec{0}$ soit $\overrightarrow{GI}+3(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IJ})=\vec{0}$ puis $4\overrightarrow{GI}+3\overrightarrow{IJ}=\vec{0}$ et $4\overrightarrow{IG}=3\overrightarrow{IJ}$ d'où $\overrightarrow{IG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{IJ}$.

Ceci permet de placer le point G sans difficulté.

**Exercice 18.**
Dans le triangle ABC, E est le milieu de [AB] et G est le barycentre de (A, – 2), (B, – 2), (C, 15).
Comme E est le milieu de [AB], c'est le barycentre de (A, – 2), (B, – 2). Par associativité du barycentre, G est alors le barycentre de (E, – 4) et (C, 15). Ceci montre que les points G, C, et E sont alignés.

**Exercice 19.** ABCD est un quadrilatère. On note G son isobarycentre. Le but de cet exercice est de préciser la position du point G.
1) On note I le milieu de [AC] et J le milieu de [BD]. I est le barycentre de (A, 1) et (C, 1) tandis que J est le barycentre de (B, 1) et (D, 1). On en déduit par associativité du barycentre que G, barycentre de (A, 1), B, 1), (C, 1), (D, 1) est aussi le barycentre de (I, 2) et (J, 2). Autrement dit, G est le milieu de [IJ].
2) La figure ne présente aucune difficulté, on construit I, J et G qui sont les milieux des segments [AC], [BD] et [IJ].
3) Si ABCD est un parallélogramme, [AC] et [BD] se coupent en leur milieu et donc d'après ce qui précède les points I et J sont confondus. Le point G, milieu de [IJ] est alors confondu avec I et J. G est donc le centre du parallélogramme.

**Exercice 20.** ABC est le triangle donné ci-dessous. Y est le milieu de [BC].
1) Le barycentre U de (A, 4) et (C, 1) vérifie la relation $4\overrightarrow{UA}+\overrightarrow{UC}=\vec{0}$ soit $4\overrightarrow{UC}+4\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{UC}=\vec{0}$.

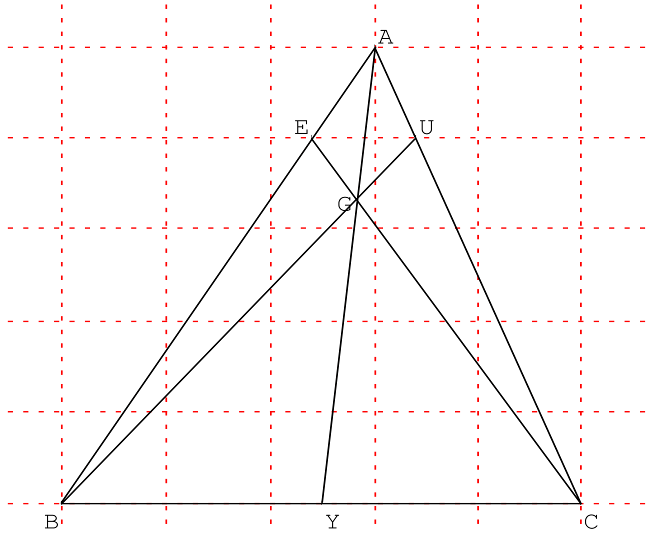
Donc $5\overrightarrow{UC}+4\overrightarrow{CA}=\vec{0}$ et $4\overrightarrow{CA}=5\overrightarrow{CU}$ puis $\overrightarrow{CU}=\frac{4}{5}\overrightarrow{CA}$. Ceci permet de placer le point U.

Le barycentre E de (A, 4) et (B, 1) vérifie la relation $4\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}=\vec{0}$ soit $4\overrightarrow{EB}+4\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{EB}=\vec{0}$.

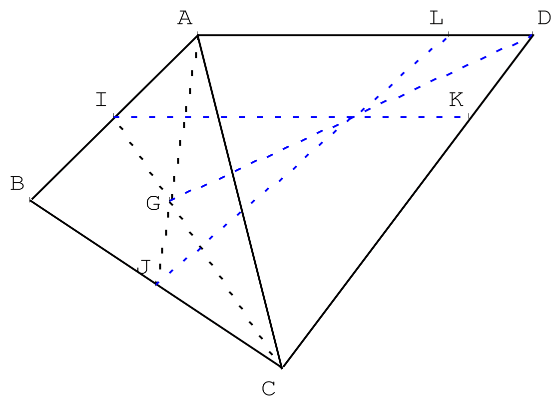
Donc $5\overrightarrow{EB}+4\overrightarrow{BA}=\vec{0}$ et $5\overrightarrow{BE}=4\overrightarrow{BA}$ d'où $\overrightarrow{BE}=\frac{4}{5}\overrightarrow{BA}$. Ceci permet de placer le point E.

2) Soit G le barycentre de (A, 4), (B, 1) et (C, 1). Comme E est le barycentre de (A, 4) et (B, 1), on a par associativité que G est le barycentre de (E, 5) et (C, 1).
3) ▪ Comme G est le barycentre de (E, 5) et (C, 1)
alors les points G, E, C sont alignés.

▪ Comme Y est le milieu de [BC], Y est aussi le barycentre de (B, 1) et (C, 1).
G est barycentre de (A, 4), (B, 1) et (C, 1), par associativité du barycentre, G est aussi le barycentre de (A, 4) et (Y, 2). Ceci prouve que les points A, Y et G sont alignés.
▪ Comme G est le barycentre de (A, 4), (B, 1), (C, 1) et que U est le barycentre de (A, 4) et (C, 1), par associativité G est le barycentre de (B, 1) et (U, 5). Donc les points G, B, U sont alignés.
▪ On peut donc dire que les droites (EC), (AY) et (BU) sont concourantes en G.




**Exercice 21.**
ABCD est un quadrilatère.
G est le centre de gravité du triangle ABC.
I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [BC].
L est le barycentre de (A, 1) et (D, 3).
K est le barycentre de (C, 1) et (D, 3).




Le but de l'exercice est de démontrer que les droites (IK), (JL) et (DG) sont concourantes.

Pour cela, on utilise le barycentre H de (A, 1), (B, 1), (C, 1) et (D, 3).

1) Plaçons en justifiant, les points L et K.

Il suffit de voir que $\overrightarrow{AL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$.

2) Démontrons que H est le barycentre de G et D munis de coefficients que l'on précisera.

Comme G est la centre de gravité du triangle ABC alors $\frac{G}{3} = \text{bar}\begin{pmatrix} A & B & C \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Comme $\frac{G}{3} = \text{bar}\begin{pmatrix} A & B & C \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\frac{H}{6} = \text{bar}\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ alors $\frac{H}{6} = \text{bar}\begin{pmatrix} G & D \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ d'après l'associativité du barycentre. Donc H est le milieu de [GD].

3) Démontrons que H est le barycentre de J et L munis de coefficients que l'on précisera.

Comme $\frac{L}{4} = \text{bar}\begin{pmatrix} A & D \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\frac{J}{2} = \text{bar}\begin{pmatrix} B & C \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\frac{H}{6} = \text{bar}\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ alors $\frac{H}{6} = \text{bar}\begin{pmatrix} L & J \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ d'après l'associativité du barycentre. Donc $H \in (JL)$.

4) Démontrons que H est le barycentre de I et K munis de coefficients que l'on précisera.

Comme $\frac{K}{4} = \text{bar}\begin{pmatrix} C & D \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\frac{I}{2} = \text{bar}\begin{pmatrix} A & B \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\frac{H}{6} = \text{bar}\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ alors $\frac{H}{6} = \text{bar}\begin{pmatrix} K & I \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ d'après l'associativité du barycentre. Donc $H \in (IK)$.

5) Comme H appartient aux droites (IK), (JL) et (DG) alors elles sont concourantes en H.

# Chapitre 4

# Analytique du produit scalaire

Dans tout le chapitre, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ désignent deux vecteurs du plan.
Une unité de longueur est fixée.

## I/ Définition

**Définition**

On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le nombre réel noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ et défini par :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \begin{cases} \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) & \text{si } \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0} \text{ et } \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0} \\ 0 & \text{si } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \text{ ou } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

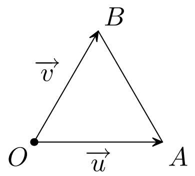
Le produit scalaire d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ par lui-même $(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u})$ est appelé carré scalaire de $\overrightarrow{u}$ et se note $\overrightarrow{u}^2$.

Remarque : Le produit scalaire est donc une opération dont les arguments sont des vecteurs et dont le résultat est réel.

*Exemple : Sur la figure ci-contre, le triangle $OAB$ est équilatéral et $OA = 2$.*
*Calculer $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$.*

On a $\|\overrightarrow{u}\| = 2$, $\|\overrightarrow{v}\| = 2$ et $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{3}$

Ainsi $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 2 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2$




## II/ Autres expressions du produit scalaire

### a) Cas des vecteurs colinéaires

**Propriété**

– Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de même sens alors

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$$

– Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de sens contraires alors

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$$

*Démonstration*

– Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de même sens alors $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = 0$
Ainsi, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos 0 = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$

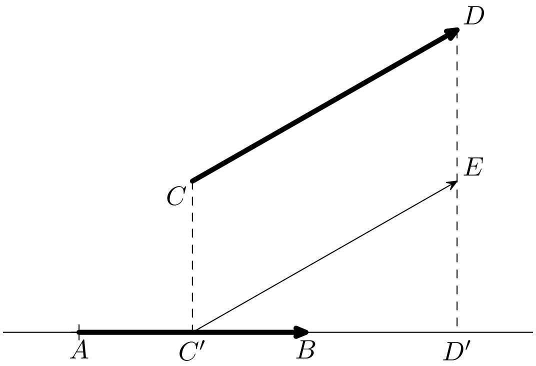
– Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de sens contraires, alors $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = \pi$
Ainsi, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos\pi = -\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$

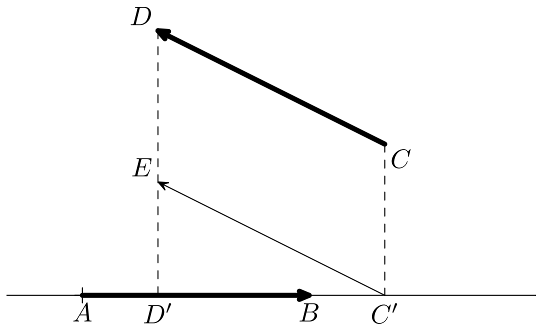
Conséquences :
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de même sens alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} > 0$ et si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et sens contraires alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} < 0$
- Quel que soit le vecteur $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2$

### b) Avec des projetés orthogonaux

**Propriété**

Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points du plan.
Si $C'$ et $D'$ sont les projeté orthogonaux de $C$ et $D$ sur $(AB)$ alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$

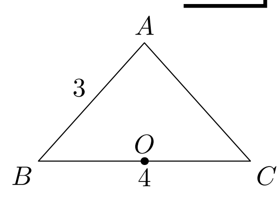



*Démonstration*

Soit $E$ le point tel que $\overrightarrow{C'E} = \overrightarrow{CD}$.
On a alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'E} = AB \times C'E \times \cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{C'E})$.
- Si l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{C'E})$ est droit alors $\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{C'E}) = \cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = 0$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'} = 0$.
- Si l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{C'E})$ est aigu alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{C'D'}$ sont colinéaires et de même sens et $\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{C'E}) = \dfrac{C'D'}{C'E}$
Ainsi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = AB \times C'E \times \dfrac{C'D'}{C'E} = AB \times C'D' = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$.
- Si l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{C'E})$ est obtus alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{C'D'}$ sont colinéaires et de sens contraires et $\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{C'E}) = -\dfrac{C'D'}{C'E}$
Ainsi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -AB \times C'E \times \dfrac{C'D'}{C'E} = -AB \times C'D' = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$.

*Exemple : $ABC$ est un triangle isocèle en $A$ tel que $AB = 3$ et $BC = 4$.*
*$O$ est le milieu du segment $[BC]$. Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC}$.*




Le projeté orthogonal de $A$ sur $(BC)$ est $O$ donc
$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC} = BO \times BC = 2 \times 3 = 6$
Le projeté orthogonal de $A$ sur $(BC)$ est $O$ donc
$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CO}.\overrightarrow{BC} = -CO \times BC = -2 \times 3 = -6$

### c) Dans un repère

**Propriété**

Soit $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormal du plan.
Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$.

*Démonstration*

Soit $A$ le point tel que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$ et $B$ le point tel que $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$.

1/ Cas des vecteurs colinéaires.

Il existe $k$ tel que $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OA}$. Ainsi $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

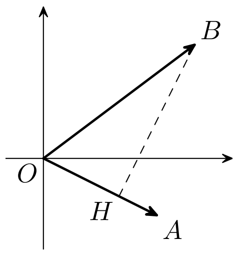
- Si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires et de même sens alors $k > 0$ et $OB = kOA$.
  On a alors $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA \times OB = k \times OA \times OA = kOA^2$.
- Si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires et de même sens contraire alors $k < 0$ et $OB = -kOA$.
  On a alors $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = -OA \times OB = k \times OA \times OA = kOA^2$.

Ainsi $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = k(x^2 + y^2) = kxx + kyy = xx' + yy'$

2/ Cas des vecteurs quelconques.

Soit $H$ le projeté orthogonal de $B$ sur $(OA)$.
On a alors, d'après ce qui précède,

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} = xx_H + yy_H$$




En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles $OBH$ et $ABH$ rectangles en $H$, on obtient :

$$BH^2 = OB^2 - OH^2 = AB^2 - AH^2$$

ce qui nous donne :

$$x'^2 + y'^2 - x_H^2 - y_H^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 - (x - x_H)^2 - (y - y_H)^2$$

puis, en simplifiant :

$$0 = -2xx' - 2yy' + 2xx_H + 2yy_H$$

soit :

$$xx_H + yy_H = xx' + yy'$$

On en déduit donc : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = xx' + yy'$.

*Exemple : Dans un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$*

*Calculer $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}$.*

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 6 \times 3 + 3 \times (-1) = 18 - 3 = 15$
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = 6 \times (-2) + 3 \times 2 = -12 + 6 = -6$
$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w} = 3 \times (-2) + (-1) \times 2 = -6 - 2 = -8$

## III/ Règles de calcul

**Propriété**

Quels que soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ :
- $\overrightarrow{0}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{0} = 0$
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$ (On dit que le produit scalaire est symétrique)
- $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{u}.(k\overrightarrow{v}) = k \times (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$
- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}$ et $(k\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = k \times (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$

*Démonstration*

- Le premier résultat est une conséquence directe de la définition.
- Le deuxième résultat est aussi une conséquence de la définition ($\cos(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = \cos(\overrightarrow{v}; \overrightarrow{u})$).

– On se place dans un repère orthonormal du plan et on pose $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$

Les coordonnées de $\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$ sont $\begin{pmatrix}x'+x''\\y'+y''\end{pmatrix}$.
On a ainsi, $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = x(x'+x'')+y(y'+y'') = xx'+xx''+yy'+yy''$.
De plus $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = xx'+yy'+xx''+yy''$.
Conclusion : $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$
Les coordonnées de $k\overrightarrow{v}$ sont $\begin{pmatrix}kx'\\ky'\end{pmatrix}$.
On a ainsi $\overrightarrow{u}.(k\overrightarrow{v}) = x(kx')+y(ky') = kxx'+kyy'$.
De plus $k\times(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}) = k(xx'+yy') = kxx'+kyy'$
Conclusion $\overrightarrow{u}.(k\overrightarrow{v}) = k\times(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$

– Le quatrième résultat se démontre en utilisant les deux précédents.

*Exemple : $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs, simplifier $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2$, $(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})^2$ et $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})$.*

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2 &= (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).\overrightarrow{v}\\ &= \overrightarrow{u}^2+\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}^2 = \overrightarrow{u}^2+2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^2\\ (\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})^2 &= (\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}).\overrightarrow{u}-(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}).\overrightarrow{v}\\ &= \overrightarrow{u}^2-\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}^2 = \overrightarrow{u}^2-2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^2\\ (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}) &= \overrightarrow{u}^2-\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}^2 = \overrightarrow{u}^2-\overrightarrow{v}^2\end{aligned}$$

# IV/ Vecteurs orthogonaux

## a) Définition

**Définition**

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si :

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \text{ ou } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \text{ ou } (OA)\perp(OB)$$

## b) Propriété

**Propriété**

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

*Démonstration*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0 &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\times\cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = 0\\ &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{u}\| = 0 \text{ ou } \|\overrightarrow{v}\| = 0 \text{ ou } \cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = 0\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \text{ ou } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \text{ ou } (\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{2}+k\times 2\pi\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont orthogonaux}\end{aligned}$$

*Exemple : Dans un repère orthonormal $(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$, on donne $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}6\\-9\end{pmatrix}$.*

*Démontrer que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.*

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 6\times 6+4\times(-9) = 36-36 = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont donc orthogonaux.

# *Chapitre 5*

# Applications du produit scalaire

## I/ Équations de droites

### a) Définition

**Définition**

Un vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ est dit normal à une droite $d$ si la direction de $\overrightarrow{n}$ est orthogonale à celle de $d$.

### b) Propriétés

**Propriété**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$.

1/ Une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ a une équation de la forme $ax+by+c=0$ avec $c\in\mathbb{R}$.

2/ Étant donnés trois réels $a$, $b$ et $c$ où $a$ et $b$ ne sont pas nuls simultanément, l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $ax+by+c=0$ est une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

*Démonstration*

1/ Soit $d$ une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et soit $A(x_0;y_0)\in d$.

Soit $M(x;y)$, on a $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$

$M(x;y)\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}=0 \Leftrightarrow (x-x_0)a+(y-y_0)b=0 \Leftrightarrow ax+by+c=0$ avec $c=-ax_0-by_0$.

2/ Soit $d$ l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $ax+by+c=0$ et soit $A(x_A,y_A)\in d$.

$M(x;y)\in d \Leftrightarrow ax+by+c=0=ax_A+by_A+c$

$\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{n}.\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{n}$

$\Leftrightarrow M$ appartient à la droite passant par $A$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

*Exemple : Dans un repère orthonormal, on considère les points $A(3;-1)$ et $B(2;4)$. Déterminer une équation de la médiatrice $m$ de $[AB]$.*

La médiatrice de [AB] est la droite perpendiculaire à $(AB)$ passant par le milieu $I$ de $[AB]$.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ donc une équation de $m$ est de la forme $-x+5y+c=0$.

De plus, $I\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right) \in m$ donc $-\frac{5}{2}+5\times\frac{3}{2}+c=0$ donc $c=-5$.
Une équation de $m$ est donc $-x+5y-5=0$.

## II ) *Norme d'un vecteur.*

Le réel $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}$, noté $\overrightarrow{u}^2$ est appelé carré scalaire de $\overrightarrow{u}$
Si $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{OA}$, alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}=\overline{OA}\times\overline{OA}=OA^2$ est un nombre positif.

**Définition 3.2.** La norme d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ est le réel positif $\sqrt{\overrightarrow{u}^2}$ notée $||\overrightarrow{u}||$

**Propriétés** (De la norme)**.**

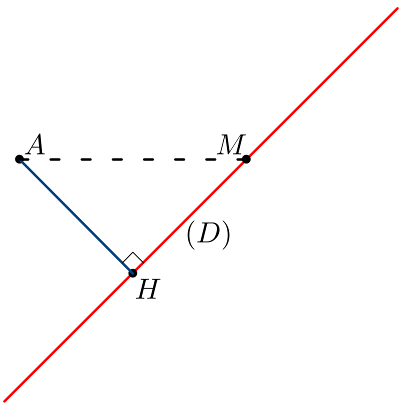
*Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs, $\alpha$ un réel.*
***i)*** $||\overrightarrow{u}||=0$ *si et seulement si* $\overrightarrow{u}=0$.
***ii)*** $||\alpha\overrightarrow{u}||=|\alpha|\times||\overrightarrow{u}||$
***iii)*** $||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||\leq||\overrightarrow{u}||+||\overrightarrow{v}||$.

## III ) *Distance d'un point `a une droite.*

Soit $(\mathcal{D})$ une droite du plan. Soit $A$ un point du plan, $H$ son projeté orthogonal sur $(\mathcal{D})$.

Si $M$ est un point quelconque de $(\mathcal{D})$, $AM^2=AH^2+HM^2$ ; donc $AM^2\geq AH^2$ c'est-à-dire $AM\geq AH$.

Ainsi la distance $AH$ est le minimum des distances de $A$ aux points de $(\mathcal{D})$.




D'où la définition suivante.

***Définition*** Ãoit $(\mathcal{D})$ une droite du plan. Soit $A$ un point du plan, $H$ son projet Ã orthogonal sur $(\mathcal{D})$.

Le nombre réel $AH$ est appelé la distance du point $A$ à la droite $(\mathcal{D})$ ; on le notera $d(A,(\mathcal{D}))$.

***Théoreme*** **.** *Le plan est muni d'un repere orthonormé d'origine $O$. Soient $(\mathcal{D})$ une droite d'équation $ax+by+c=0$ et $A$ un point de coordonnées $(x_A, y_A)$.*
*Alors* $\boxed{d(A,(\mathcal{D})) = \dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$.

*Démonstration.*

Le vecteur $\overrightarrow{n}(a,b)$ est normal à $(\mathcal{D})$
Puisque $H$ appartient à $(\mathcal{D})$, on a : $ax_H + by_H + c = 0$.

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{n} = (\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OH}).\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{n} + \overrightarrow{OH}\overrightarrow{n}$$
$$= -ax_A - by_A + ax_H + by_H = -ax_A - by_A - c.$$
$$|\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{n}| = |-ax_A - by_A - c|.$$
$$\| \overrightarrow{AH} \| . \| \overrightarrow{n} \| \, |\cos(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{n})| = |ax_A + by_A + c|.$$
$$\| \overrightarrow{AH} \| . \| \overrightarrow{n} \| = |ax_A + by_A + c|.$$
$$AH = \frac{|ax_A+by_A+c|}{\| \overrightarrow{n} \|}.$$
$$AH = d(A,(\mathcal{D})) = \frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

***Remarque.*** *Lorsque le vecteur $\overrightarrow{n}(a,b)$ est unitaire, alors*
$\boxed{AH = d(A,(\mathcal{D})) = |ax_A+by_A+c|}$.

***Remarque.***
*Soit $(\mathcal{D})$ une droite du plan de vecteur normal unitaire $\overrightarrow{n}$, et $A$ un point du plan.*
*Le réel*

$$p_{\mathcal{D}}(A) = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}$$

***est indépendant du choix de $M$ sur la droite*** $(\mathcal{D})$.
*En effet si $H$ est la projeté orthogonal de $A$ sur $(\mathcal{D})$, on a :*
$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = (\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HM}).\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{n}$.
*On en déduit en outre, que $|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}| = AH$ est la distance de $A$ à $(\mathcal{D})$.*

# IV/ Équations de cercles

## a) Forme générale

**Propriété**

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormal.
Une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(x_A;y_A)$ et de rayon $R$ est

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=R^2$$

*Démonstration*

$M(x;y)\in\mathscr{C}\Leftrightarrow AM=R\Leftrightarrow AM^2=R^2\Leftrightarrow(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=R^2.$

*Exemple : Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormal.*

*Quelle est la nature de l'ensemble $\mathscr{E}$ des points $M(x;y)$ tels que $x^2+y^2-6x+2y+5=0$ ?*

$$\begin{aligned}M(x;y)\in\mathscr{E}&\Leftrightarrow x^2+y^2-6x+2y+5=0\Leftrightarrow x^2-6x+y^2+2y+5=0\\&\Leftrightarrow(x-3)^2-9+(y+1)^2-1+5=0\Leftrightarrow(x-3)^2+(y+1)^2=5\end{aligned}$$

$\mathscr{E}$ est donc le cercle de centre $C(3;-1)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

## b ) Representation parametrique d'un cercle

Soit $I(a;b)$ un point du plan, $(a,b\in\mathbb{R})$, et $r$ un réel strictement positif : on note $\mathcal{C}(I;r)$ le cercle de centre $I$ et de rayon $r$. Soit $M(x;y)$ un point du plan.

**Définition :** Le système

$$\begin{cases}x&=&a+r\cos t\\y&=&b+r\sin t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$$

est une **représentation paramétrique** du cercle $\mathcal{C}$.
$t$ est le **paramètre**.

## b) Cercle de diamètre donné

**Propriété**

On considère deux points $A$ et $B$ du plan. Le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points $M$ du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$.

*Démonstration*

$$M\in\mathscr{C}\Leftrightarrow\left|\begin{array}{ll}&M=A\\\text{ou}&M=B\\\text{ou}&AMB\text{ est un triangle rectangle en }M\end{array}\right.\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0.$$

*Exemple : Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormal.*
*Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ avec $A(2;2)$ et $B(6;-2)$.*

Soit $M(x;y)$. On a $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}2-x\\2-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}6-x\\-2-y\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}M(x;y)\in\mathscr{C}&\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0\Leftrightarrow(2-x)(6-x)+(2-y)(-2-y)=0\\&\Leftrightarrow 12-8x+x^2-4-2y+2y+y^2=0\end{aligned}$$

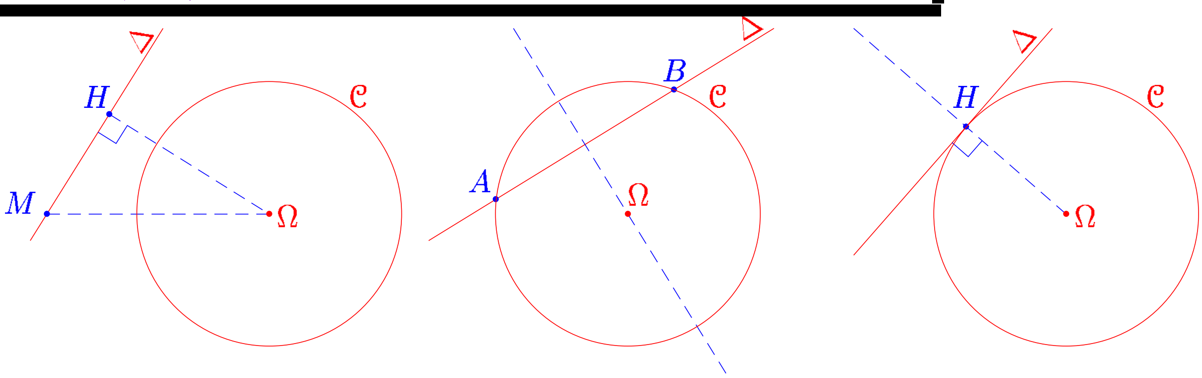
Une équation de $\mathscr{C}$ est donc $x^2+y^2-8x+8=0$.

## V) Position relative d'une droite et d'un cercle

**Proposition**

Soit une droite $\Delta$ et un cercle $\mathcal{C}(\Omega, R)$.

- Si $\mathrm{d}(\Omega, R) > R$, $\Delta$ et $\mathcal{C}$ ne se rencontrent pas.
- Si $\mathrm{d}(\Omega, R) < R$, $\Delta$ et $\mathcal{C}$ ont exactement deux points communs.
- Si $\mathrm{d}(\Omega, R) = R$, $\Delta$ et $\mathcal{C}$ ont un seule point commun.




*Démonstration.* Soit $H$ le projeté orthogonal de $M$ sur $\Delta$: $\mathrm{d}(\Omega, \Delta) = \Omega H$. Un point $M \in \Delta$ est sur $\mathcal{C}$ si, et seulement si $\Omega M^2 = R^2$. Par le théorème de pythagore, on a:

$$\Omega M^2 = \Omega H^2 + HM^2 = \mathrm{d}(\Omega, \Delta)^2 + HM^2,$$

et $M$ appartient à $\mathcal{C}$ si, et seulement si

$$HM^2 = R^2 - \mathrm{d}(\Omega, \Delta)^2.$$

Il existe zéro, deux ou une solution à cette équation selon que le second membre est strictement négatif, strictement positif ou nul. ■

**Vocabulaire:** Dans le dernier cas, $\Delta$ est dite tangente au cercle en $H$; elle est orthogonale au rayon du cercle.

Regardons analytiquement l'équation d'une tangente:

**Proposition**

L'équation de la tangente au point de coordonnées $(x_0, y_0)$ du cercle d'équation

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

est:

$$xx_0 + yy_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) + c = 0.$$

*Démonstration.* La tangente est la droite passant par $(x_0, y_0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega M_0}$. Le centre $\Omega$ a pour coordonnées $(a, b)$, ainsi le vecteur $\overrightarrow{\Omega M_0}$ a pour composante $(x_0 - a, y_0 - b)$. Sont équation est donc

$$(x - x_0)(x_0 - a) + (y - y_0)(y_0 - b) = 0,$$

c'est-à-dire:

$$xx_0 - ax - x_0^2 + ax_0 + yy_0 - by - y_0^2 + by_0 = 0,$$

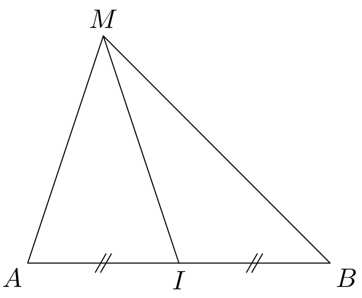
donc:

$$xx_0 + yy_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) - x_0^2 - y_0^2 + 2ax_0 + 2by_0 = 0,$$

et compte tenu du fait que l'on a $x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + c = 0$, on obtient la formule de l'énoncé.

# VI/ Longueurs et angles dans un triangle

## a) Théorème de la médiane




On considère deux points $A$ et $B$ du plan et $I$ le milieu de $[AB]$. Pour tout point $M$ du plan, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

*Démonstration*

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 \\ &= 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + IA^2 + IB^2 \end{aligned}$$

Or $I$ est le milieu de $[AB]$ donc $IA = IB = \frac{1}{2}AB$ donc $IA^2 = IB^2 = \frac{1}{4}AB^2$

De plus $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$.

Ainsi $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2 \times \frac{1}{4}AB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$.

*Exemple : $ABC$ est un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 8$ et $BC = 12$. Calculer $AI$ où $I$ est le milieu de $[BC]$.*

D'après le théorème de la médiane : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$.

On a donc $2AI^2 = 6^2 + 8^2 - \frac{1}{2} \times 12^2 = 28$.

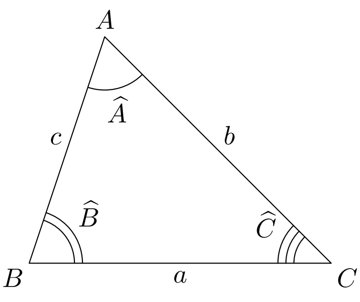
Ainsi $AI = \sqrt{14}$.

## b) Formules d'Al Kashi

**Propriété**

On considère un triangle $ABC$. On pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\widehat{A} = \widehat{BAC}$, $\widehat{B} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{C} = \widehat{ACB}$. On a :

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A}) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\widehat{B}) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{C}) \end{aligned}$$




*Démonstration*

$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = BA^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Ainsi $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$ soit $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$

*Exemple : $ABC$ est un triangle tel que $AC = 9$, $AB = 5$ et $\widehat{A} = \frac{\pi}{3}$. Calculer $BC$.*

D'après la formule d'Al Kashi :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{A}) = 5^2 + 9^2 - 2 \times 5 \times 9 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 61$

Ainsi $BC = \sqrt{61}$

### c) Aire d'un triangle

On considère un triangle $ABC$ et on appelle $S$ son aire. Avec les notations ci-dessus, on a :

$$S = \frac{1}{2}bc\sin(\widehat{A}) = \frac{1}{2}ac\sin(\widehat{B}) = \frac{1}{2}ab\sin(\widehat{C})$$

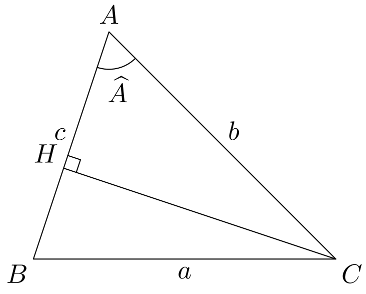
*Démonstration*

Soit $H$ le projeté orthogonal de $C$ sur $AB$. On a alors $S = \frac{1}{2}AB \times CH$.

Si l'angle $\widehat{A}$ est aigu alors $CH = AC\sin(\widehat{A})$.

Si l'angle $\widehat{A}$ est obtus alors $CH = AC\sin(\pi - \widehat{A}) = AC\sin(\widehat{A})$

Dans tous les cas $S = \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin(\widehat{A})$.




### d) Formule des sinus

On considère un triangle $ABC$. Avec les notations ci-dessus, on a :

$$\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})}$$

*Démonstration*

On a $S = \frac{1}{2}bc\sin(\widehat{A}) = \frac{1}{2}ac\sin(\widehat{B}) = \frac{1}{2}ab\sin(\widehat{C})$

donc $\frac{2S}{abc} = \frac{\sin(\widehat{A})}{a} = \frac{\sin(\widehat{B})}{b} = \frac{\sin(\widehat{C})}{c}$

ainsi $\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})}$.

*Exemple : $ABC$ est un triangle tel que $BC = 5$, $\widehat{B} = 50°$ et $\widehat{C} = 75°$. Calculer $AB$ et $AC$ et donner les valeurs arrondies au dixième.*

$\widehat{A} = 180° - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 55°$

$\frac{AB}{\sin(\widehat{C})} = \frac{AC}{\sin(\widehat{B})} = \frac{BC}{\sin(\widehat{A})} \Leftrightarrow \frac{AB}{\sin(75°)} = \frac{AC}{\sin(50°)} = \frac{5}{\sin(55°)}$

On a donc $AB = \frac{5\sin(75°)}{\sin(55°)} \simeq 5,9$ et $AC = \frac{5\sin(50°)}{\sin(55°)} \simeq 4,7$.

# Exercices corrigés

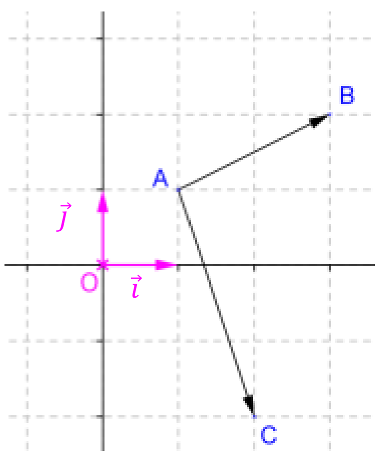
Sont abordés dans cette fiche :

- **Exercice 1 :** produit scalaire en fonction des coordonnées de vecteurs dans un repère orthonormé
- **Exercice 2 :** propriétés du produit scalaire (règles de calcul et identités remarquables)
- **Exercice 3 :** produit scalaire en fonction des normes de vecteurs
- **Exercices 4 et 5 :** orthogonalité de deux vecteurs et produit scalaire nul
- **Exercice 6 :** formule de la médiane
- **Exercice 7 :** produit scalaire de vecteurs colinéaires
- **Exercices 8 et 9 :** produit scalaire de vecteurs quelconques à l'aide d'une projection orthogonale
- **Exercices 10, 11, 12 et 14 :** produit scalaire en fonction des normes de vecteurs et d'un angle orienté
- **Exercice 13 :** quadrangle orthocentrique
- **Exercice 15 :** équation cartésienne de la médiatrice d'un segment
- **Exercice 16 :** équation de cercle
- **Exercices 17 et 19 :** équation de tangente à un cercle
- **Exercice 18 :** théorème d'Al-Kashi et somme des carrés des côtés d'un parallélogramme
- **Exercice 20 :** droite d'Euler
- **Exercice 21 :** recherche d'un minimum
- **Exercice 22 :** algorithme de perpendicularité de deux droites dans un repère orthonormé du plan

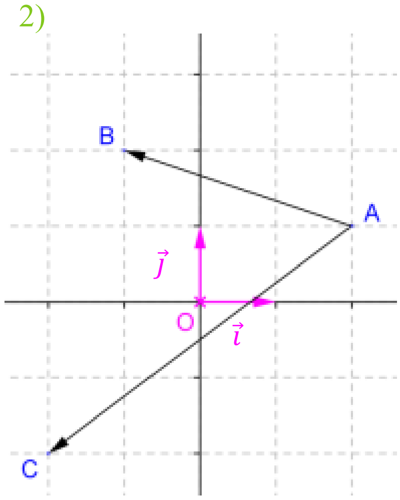
## *Exercice 1*

Soit un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ du plan. Dans chacun des trois cas suivants, calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

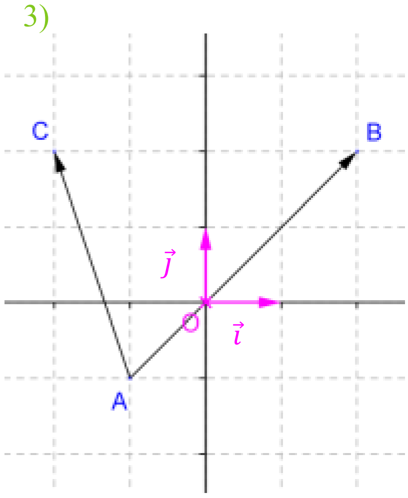
1)




2)




3)



## *Correction de l'exercice 1*

**Rappel : Produit scalaire dans un repère orthonormé du plan**

Dans un repère orthonormé du plan, si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $\binom{x}{y}$ et $\binom{x'}{y'}$, alors le produit scalaire (euclidien) du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, est donné par la relation :

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$$

**Remarque :** Cette expression ne doit pas être confondue avec la condition de colinéarité $xy' - x'y$.

Il convient tout d'abord de remarquer que le repère $(O;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ est orthonormé. En effet, les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont d'une part unitaires (puisque $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$) et d'autre part orthogonaux (puisque $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$).

1) Les points $A$, $B$ et $C$ ont pour coordonnées respectives $(1\,;1)$, $(3\,;2)$ et $(2\ ;-2)$.

Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $\binom{x_B - y_A}{y_B - y_A} = \binom{3-1}{2-1} = \binom{2}{1}$.

Quant au vecteur $\overrightarrow{AC}$, il a pour coordonnées : $\binom{x_C - y_A}{y_C - y_A} = \binom{2-1}{-2\ -1} = \binom{1}{-3}$.

Il en résulte que : $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}} = 2 \times 1 + 1 \times (-3) = 2 - 3 = \mathbf{-1}$

2) Graphiquement, $\overrightarrow{AB} = -3\vec{\imath} + 1\vec{\jmath}$. Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $\binom{-3}{1}$.

De même, $\overrightarrow{AC} = -4\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$. Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées : $\binom{-3}{-4}$.

De ce fait, $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}} = -3 \times (-3) + 1 \times (-4) = 9 - 4 = \mathbf{5}$.

3) Graphiquement, $\overrightarrow{AB} = 3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$. Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $\binom{3}{3}$.

De même, $\overrightarrow{AC} = -\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$. Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées : $\binom{-1}{3}$.

De ce fait, $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}} = 3 \times (-1) + 3 \times 3 = -3 + 9 = \mathbf{6}$.

## *Exercice 2*

Soient $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ deux vecteurs du plan tels que $\vec{\imath}^{\,2} = 2$, $\|\vec{\jmath}\| = 3$ et $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = -4$.

Calculer $(3\vec{\imath} - \vec{\jmath}).(-\vec{\imath} + 2\vec{\jmath})$, $(\vec{\imath} - 3\vec{\jmath})^2$, $\|2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}\|$ en détaillant les étapes de chaque calcul.

## Correction de l'exercice 2

**Rappel : Propriétés du produit scalaire (symétrie et bilinéarité)**

Soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et soit le réel $\lambda$.

- **Symétrie :** $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- **Bilinéarité :**
  - ✓ Linéarité par rapport à la première variable : $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ et $(\lambda\vec{u}).\vec{v} = \lambda\vec{u}.\vec{v}$
  - ✓ Linéarité par rapport à la seconde variable : $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ et $\vec{u}.(\lambda\vec{v}) = \lambda\vec{u}.\vec{v}$

**Carré scalaire :**

$$\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$$

1) Calculons $(3\vec{i}-\vec{j}).(-\vec{i}+2\vec{j})$.

$$(\mathbf{3}\vec{\boldsymbol{i}}-\vec{\boldsymbol{j}}).(-\vec{\boldsymbol{i}}+\mathbf{2}\vec{\boldsymbol{j}}) \underbrace{=}_{\text{bilinéarité}} (3\vec{i}).(-\vec{i}) + (3\vec{i}).(2\vec{j}) - \vec{j}.(-\vec{i}) - \vec{j}.(2\vec{j})$$

$$= \underbrace{3\times\ -1)\,\vec{i}.\vec{i}}_{\substack{\text{linéarité}\\ \text{par rapport aux}\\ 1^{\text{ère}}\text{ et }2^{\text{nde}}\text{ variables}}} + \underbrace{3\times 2\,\vec{i}.\vec{j}}_{\substack{\text{linéarité}\\ \text{par rapport aux}\\ 1^{\text{ère}}\text{ et }2^{\text{nde}}\text{ variables}}} - 1\times \underbrace{(-1)\,\vec{j}.\vec{i}}_{\substack{\text{linéarité}\\ \text{par rapport}\\ \text{à la }2^{\text{nde}}\text{ variable}}} - 1\times \underbrace{2\,\vec{j}.\vec{j}}_{\substack{\text{linéarité}\\ \text{par rapport}\\ \text{à la }2^{\text{nde}}\text{ variable}}}$$

$$= -3\underbrace{\vec{i}^{\,2}}_{\substack{\text{carré}\\ \text{scalaire}}} + 6\vec{i}.\vec{j} + \underbrace{\vec{i}.\vec{j}}_{\text{symétrie}} - 2\underbrace{\|\vec{j}\|^2}_{\substack{\text{carré}\\ \text{scalaire}}} = -3\vec{i}^{\,2} + 7\vec{i}.\vec{j} - 2\|\vec{j}\|^2 = -3\times 2 + 7\times\ -4) - 2\times 3^2 = \mathbf{-52}$$

**Rappel : Identités remarquables**

Soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} + 2\,\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^{\,2} \qquad (\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} - 2\,\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^{\,2} \qquad (\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^{\,2} - \vec{v}^{\,2}$$

2) Calculons $(\vec{i}-3\vec{j})^2$.

$$(\vec{\boldsymbol{i}}-\mathbf{3}\vec{\boldsymbol{j}})^{\mathbf{2}} \underbrace{=}_{\substack{\text{identité}\\ \text{remarquable}}} \vec{i}^{\,2} + 2\,\vec{i}.(-3\vec{j}) + (-3\vec{j})^2 = \vec{i}^{\,2} + 2\times \underbrace{(-3)\vec{i}.\vec{j}}_{\substack{\text{linéarité}\\ \text{par rapport}\\ \text{à la }2^{\text{nde}}\text{ variable}}} + \underbrace{(-3)^2\vec{j}^{\,2}}_{\substack{\text{linéarité}\\ \text{par rapport aux}\\ 1^{\text{ère}}\text{ et }2^{\text{nde}}\text{ variables}}}$$

$$= 2 - 6\times\ -4) + 9\times 9 = \mathbf{107}$$

3) Calculons $\|2\vec{i}+3\vec{j}\|$.

$$\|2\vec{i}+3\vec{j}\|^2 = (2\vec{i}+3\vec{j})^2 \underbrace{=}_{\substack{\text{identité}\\ \text{remarquable}}} (2\vec{i})^2 + 2\times(2\vec{i}).(3\vec{j}) + (3\vec{j})^2$$

$$= \underbrace{2^2\,\vec{\imath}^{\,2}}_{\substack{\text{linéarité}\\ \text{par rapport aux}\\ 1^{\text{ère}} \text{ et } 2^{\text{nde}} \text{ variables}}} + \underbrace{2\times 2\times 3\,\vec{\imath}.\vec{\jmath}}_{\substack{\text{linéarité}\\ \text{par rapport aux}\\ 1^{\text{ère}} \text{ et } 2^{\text{nde}} \text{ variables}}} + \underbrace{3^2\,\vec{\jmath}^{\,2}}_{\substack{\text{linéarité}\\ \text{par rapport aux}\\ 1^{\text{ère}} \text{ et } 2^{\text{nde}} \text{ variables}}} = 4\times 2 + 12\times \ -4) + 9\times 3^2 = 41.$$

Ainsi, $\|\mathbf{2}\vec{\imath} + \mathbf{3}\vec{\jmath}\| = \sqrt{\mathbf{41}}$.

## Exercice 3

Soit un parallélogramme $ABCD$ tel que $AB = 5$, $AC = 6$ et $AD = 4$. Calculer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ 2) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA}$ 3) $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB}$

## *Correction de l'exercice 3*

**Rappel : Produit scalaire et normes de vecteurs**

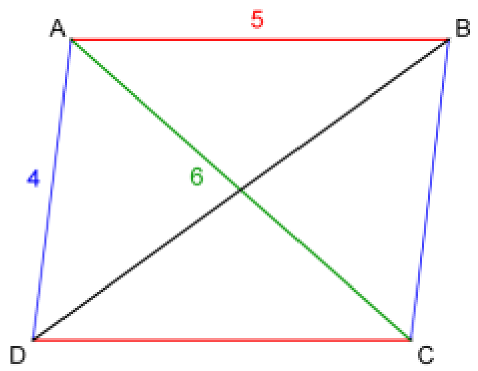
Le produit scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ par un vecteur $\vec{v}$ est le nombre réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v}-\vec{u}\|^2)$$

Tout d'abord, analysons l'énoncé.

$ABCD$ est un parallélogramme donc les égalités vectorielles suivantes sont vérifiées :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \qquad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \qquad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$




1) Calculons $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$. Par définition du produit scalaire, on a :

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{BA}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 - \|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\|^2\right) \underbrace{=}_{-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}} \frac{1}{2}\left(AB^2 + BC^2 - \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\|^2\right)$$

$$\underbrace{=}_{\substack{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=AC\\ \textit{relation}\\ \textit{de Chasles}}} \frac{1}{2}(AB^2 + AD^2 - AC^2) = \frac{1}{2}(5^2 + 4^2 - 6^2) = \frac{1}{2}(5^2 + 4^2 - 6^2) = \frac{5}{2}$$

2) Calculons désormais $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA}$.

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA} = (\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{BA}\|^2 + \|\overrightarrow{CA}\|^2 - \|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{BA}^2 + CA^2 - \|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\|^2\right) = \frac{1}{2}(BA^2 + CA^2 - CB^2)$$

$\frac{1}{2}(5 \ + 6 \ - 4 \ ) = \frac{45}{2}$

3) Calculons enfin $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} \ = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{DC}\| \ + \|\overrightarrow{AB}\| \ - \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}\| \ \right) = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AB^2 - \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}\| \ \right) \ = \frac{1}{2} \times 2AB^2 \ = AB^2 = \ 25$

**Remarque :** Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. Comme $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\| \ = AB^2 \ =25$

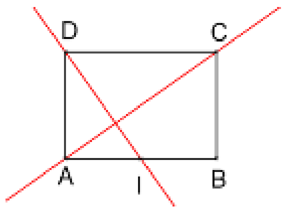
## *Exercice 4*

Soit un rectangle $ABCD$ tel que $AB \ = 2$ et $AD \ = \sqrt{2}$. $I$ désigne le milieu de $[AB]$. Montrer que les droites $(AC)$ et $(ID)$ sont perpendiculaires.

## *Correction de l'exercice 4*

**Rappel : Orthogonalité et produit scalaire nul**

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.




Par définition du produit scalaire, on a $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{ID} \ = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AC}\| \ + \|\overrightarrow{ID}\| \ - \|\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{AC}\| \ \right)$

Il convient donc de déterminer d'une part $\|\overrightarrow{AC}\|^2$, d'autre part $\|\overrightarrow{ID}\|^2$ et enfin $\|\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{AC}\|^2$.

- Commençons par déterminer $\|\overrightarrow{AC}\|^2$.

$ABCD$ est un rectangle donc le triangle $ABC$ est rectangle en $B$. Par conséquent, d'après le théorème de Pythagore, on a : $AC^2 \ = AB^2 + BC^2$. Or, comme $ABCD$ est un rectangle $BC \ = AD$, d'où $AC^2 \ = 2^2 + \sqrt{2} \ = \ 6$.

- Déterminons désormais $\|\overrightarrow{ID}\|^2$.

En outre, $I$ est le milieu de $[AB]$ donc, d'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle $AID$ rectangle en A, on a : $ID^2 = IA^2 + AD^2 \ = (AB/2) \ + AD^2 \ =(2/2)^2 + \sqrt{2} \ = 3$

- Enfin, déterminons $\|\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{AC}\|^2$.

En utilisant la relation de Chasles, on a : $\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{AC} = \underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD}}_{\overrightarrow{ID}} - \underbrace{\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)}_{\overrightarrow{AC}} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$

Or, $ABCD$ est un rectangle donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, si bien que $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.

D'où, comme $I$ est le milieu de $[AB]$, c'est-à-dire comme $\overrightarrow{IA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, il vient que :

$$\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

Par conséquent, $\|\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{AC}\| = \left\|-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}\right\| = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 \|\overrightarrow{AB}\| = \frac{9}{4} \times 2^2 = 9$

- Finalement, en remplaçant dans l'expression initiale, on obtient :

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AC}\| + \|\overrightarrow{ID}\| - \|\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{AC}\|\right) = \frac{1}{2}(6 + 3 - 9) = 0$$

Comme $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{ID} = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{ID}$ sont orthogonaux. Autrement dit, **les droites $(AC)$ et $(ID)$ sont perpendiculaires**.

## *Exercice 5*

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$. On donne $M(2 ; \lambda)$, $A(1 ; 3)$ et $L(4 ; 3 - \lambda)$. Déterminer le(s) réel(s) $\lambda$ tel que le triangle $MAL$ est rectangle en $A$.

## *Correction de l'exercice 5*

Le triangle $MAL$ est rectangle en $A$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AL}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AL} = 0$.

Or, le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées : $\binom{x_M - x_A}{y_M - y_A} = \binom{2 - 1}{\lambda - 3} = \binom{1}{\lambda - 3}$.

En outre, le vecteur $\overrightarrow{AL}$ a pour coordonnées : $\binom{x_L - x_A}{y_L - y_A} = \binom{4 - 1}{3 - \lambda - 3} = \binom{3}{-\lambda}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AL} = 0 \Leftrightarrow 1 \times 3 + (\lambda - 3) \times (-\lambda) = 0 \Leftrightarrow 3 - \lambda^2 + 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 3 = 0$

Soit $\Delta$ le discriminant du trinôme $\lambda^2 - 3\lambda - 3$ du second degré d'inconnue $\lambda$.

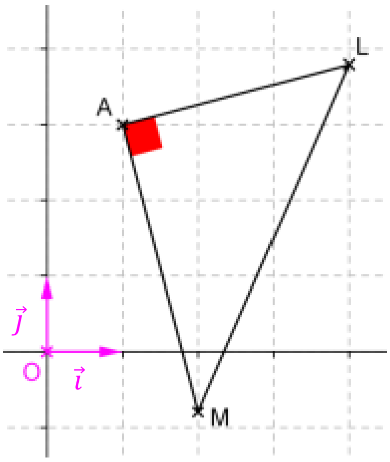
Alors $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 9 + 12 = 21$

$\Delta > 0$ donc le trinôme $\lambda^2 - 3\lambda - 3$ admet deux racines réelles distinctes $\lambda_1$ et $\lambda_2$, telles que :

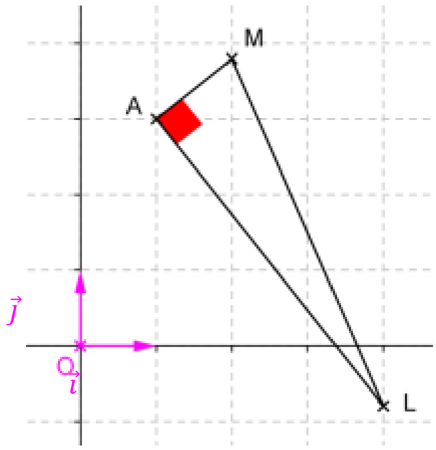
$$\lambda_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{21}}{2 \times 1} = \frac{3 - \sqrt{21}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{21}}{2 \times 1} = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$$

**Le triangle $MAL$ est rectangle en $A$ si et seulement si $\lambda_1 = \frac{3-\sqrt{21}}{2}$ (1^er^ cas) ou si $\lambda_2 = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$ (2^ème^ cas).**

- $1^{er}$ cas : $\lambda_1 = \frac{3-\sqrt{21}}{2}$




- $2^{ème}$ cas : $\lambda_2 = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$




## Exercice 6

Soit un triangle $MAB$ et soit $I$ le milieu de $[AB]$.

1) Démontrer que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$.
2) En appliquant cette formule à un triangle $MAB$ rectangle en $M$, quelle propriété connue retrouve-t-on ?
3) En appliquant cette formule à un triangle $MAB$ tel que $MA = 4$, $MB = 6$ et $AB = 7$, calculer la longueur de la médiane issue de $M$.

## Correction de l'exercice 6

1) Démontrons que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$.

D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$. Par ailleurs, $I$ est le milieu de $[AB]$ donc $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$. Ainsi, $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - IA^2$.

Or, $IA = AB/2$. Donc $\boldsymbol{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}} = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \boldsymbol{MI^2 - \frac{AB^2}{4}}$.

2) Appliquons cette formule à un triangle $MAB$ rectangle en $M$.

Si le triangle $MAB$ rectangle en $M$, alors $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$. Or, d'après ce qui précède, $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$. Ainsi, $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = 0 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{AB^2}{4}$. Comme $MI$ et $AB$ désignent des distances, il vient que $MI = \frac{AB}{2}$. Ainsi, le point $M$ appartient au cercle de centre $I$ et de rayon $\frac{AB}{2}$. Mais puisque $I$ est le milieu de $[AB]$, **$M$ appartient finalement au cercle de diamètre l'hypoténuse $[AB]$ du triangle $MAB$ rectangle en $M$.**

3) Appliquons la formule à un triangle $MAB$ tel que $MA = 4$, $MB = 6$ et $AB = 7$ afin de calculer la longueur de la médiane issue de $M$.

En notant $I$ le milieu de $[AB]$, $(MI)$ est la médiane du triangle $MAB$ issue de $M$. Ainsi, d'après ce qui précède,

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 + \frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow MI^2 = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{MA}\|^2 + \|\overrightarrow{MB}\|^2 - \|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\|^2\right) + \frac{AB^2}{4}$$

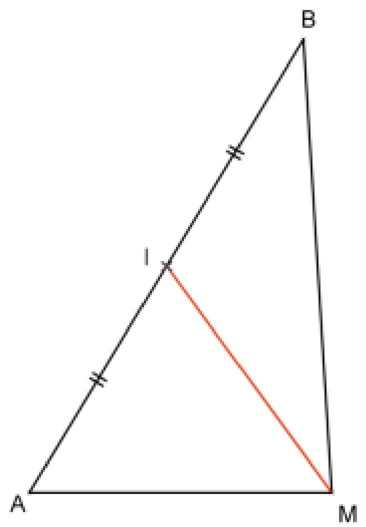
$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{MA}\|^2 + \|\overrightarrow{MB}\|^2 - \|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM}\|^2\right) + \frac{AB^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{2}(MA^2 + MB^2 - AB^2) + \frac{AB^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{2}(4^2 + 6^2 - 7^2) + \frac{7^2}{4} \Leftrightarrow MI^2 = \frac{55}{4}$$

Par conséquent, $MI = \sqrt{\frac{55}{4}} = \frac{\sqrt{55}}{2}$.

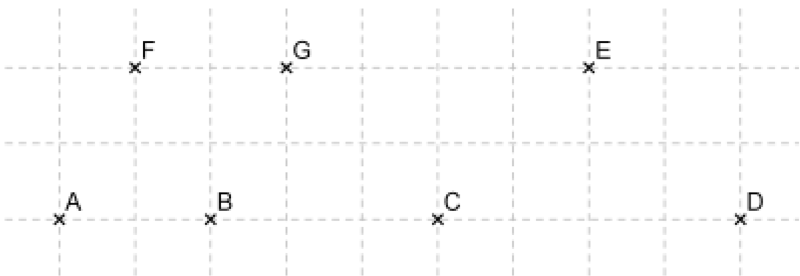
**La médiane du triangle $MAB$ issue de $M$ mesure $\frac{\sqrt{55}}{2}$.**




## *Exercice 7*

L'unité choisie est le côté d'un carré du quadrillage. Calculer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
2) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CD}$
3) $\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{GF}$
4) $\overrightarrow{FG}.\overrightarrow{BD}$
5) $\overrightarrow{GE}.\overrightarrow{DA}$




## *Correction de l'exercice 7*

**Rappel : Produit scalaire de vecteurs colinéaires**

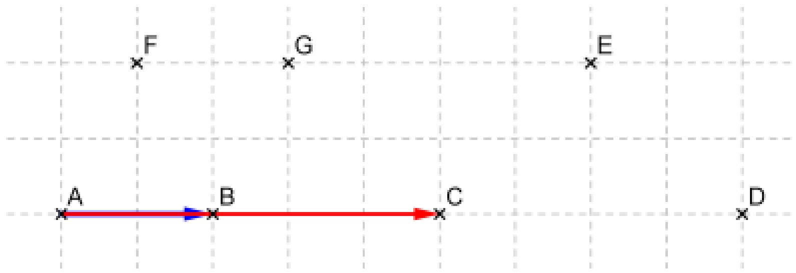
Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires et distincts du vecteur nul.

- si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens, alors $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraires, alors $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

1) Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens donc :

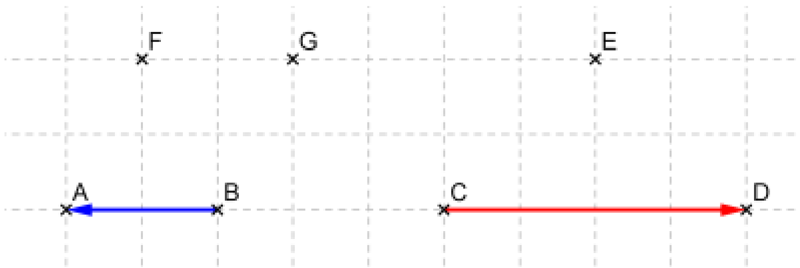
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| = 2 \times 5 = 10$




2) Calculons $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CD}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et de sens contraires donc :

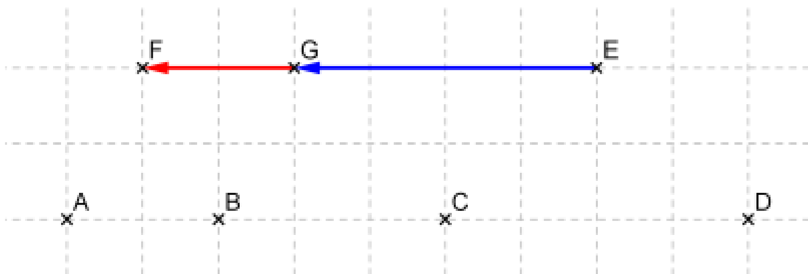
$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CD} = -\|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{CD}\| = -2 \times 4 = -8$




3) Calculons $\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{GF}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{GF}$ sont colinéaires et de même sens donc :

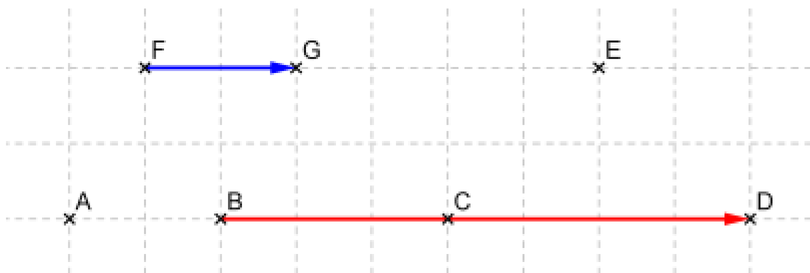
$\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{GF} = \|\overrightarrow{EG}\| \times \|\overrightarrow{GF}\| = 4 \times 2 = 8$




4) Calculons $\overrightarrow{FG}.\overrightarrow{BD}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires et de même sens donc :

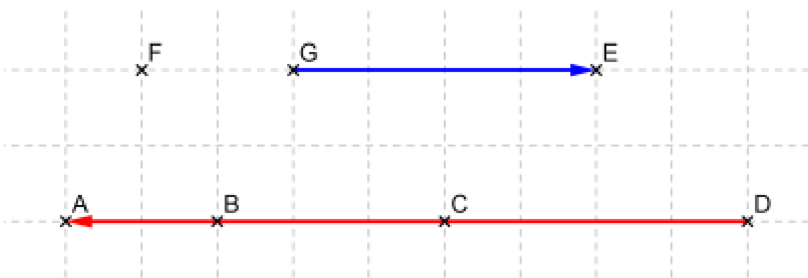
$\overrightarrow{FG}.\overrightarrow{BD} = \|\overrightarrow{FG}\| \times \|\overrightarrow{BD}\| = 2 \times 7 = 14$




5) Calculons $\overrightarrow{GE}.\overrightarrow{DA}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont colinéaires et de sens contraires donc :

$\overrightarrow{GE}.\overrightarrow{DA} = -\|\overrightarrow{GE}\| \times \|\overrightarrow{DA}\| = -4 \times 9 = -36$




En résumé,

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 10$ $\quad$ $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CD} = -8$ $\quad$ $\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{GF} = 8$ $\quad$ $\overrightarrow{FG}.\overrightarrow{BD} = 14$ $\quad$ $\overrightarrow{GE}.\overrightarrow{DA} = -36$

## *Exercice 8*

Soit un carré $ABCD$ de centre $O$ et de côté $a$. Calculer, en fonction de $a$, les six produits scalaires suivants :

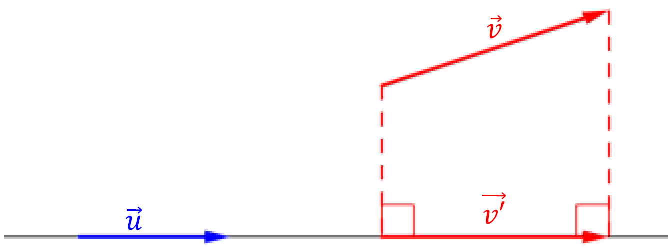
1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
2) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$
3) $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OB}$
4) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AO}$
5) $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OD}$
6) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{OB}$

## *Correction de l'exercice 8*

**Rappel : Produit scalaire et projection orthogonale de vecteurs**

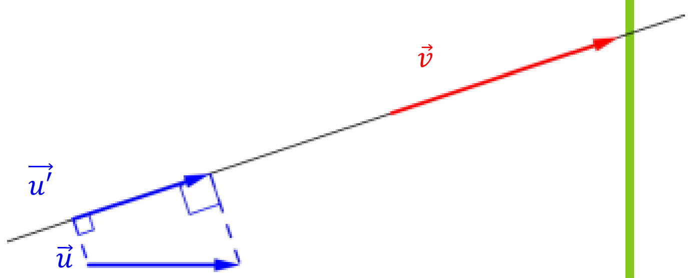
Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls. Alors, on a les relations suivantes :

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{v'}$ où $\vec{v'}$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur la droite de vecteur directeur $\vec{u}$




Par ailleurs, si les vecteurs colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v'}$ sont de même sens, alors $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{v'} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v'}\|$ et s'ils sont de sens contraires, $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{v'} = \ \|\vec{u}\| \times \|\vec{v'}\|$

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u'}.\vec{v}$ où $\vec{u'}$ est le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur la droite de vecteur directeur $\vec{v}$



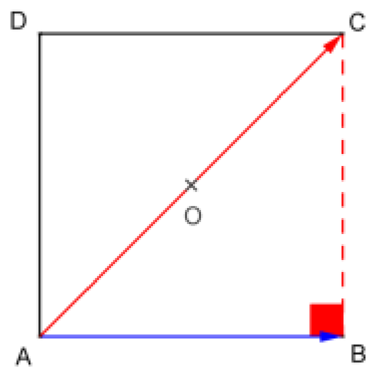

Par ailleurs, si les vecteurs colinéaires $\vec{u'}$ et $\vec{v}$ sont de même sens, alors $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u'}.\vec{v} = \|\vec{u'}\| \times \|\vec{v}\|$ et s'ils sont de sens contraires, $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u'}.\vec{v} = -\|\vec{u'}\| \times \|\vec{v}\|$

**Remarque importante :** On peut donc aussi bien projeter $\vec{v}$ sur la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ que $\vec{v}$ sur la droite de vecteur directeur $\vec{u}$. Seuls l'énoncé et la configuration de la figure tracée permettront de choisir la meilleure de ces deux options.

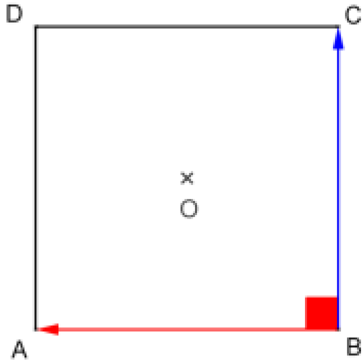
1) Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ n'étant pas colinéaires, il convient d'effectuer une projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sur la droite $(AB)$.

D'une part, $A \in (AB)$ donc $A$ est son propre projeté orthogonal sur $AB)$. D'autre part, $ABCD$ est un carré donc $B$ est le projeté orthogonal de $C$ sur $(AB)$. Ainsi, $\overrightarrow{AB}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AC}$ sur $(AB)$.



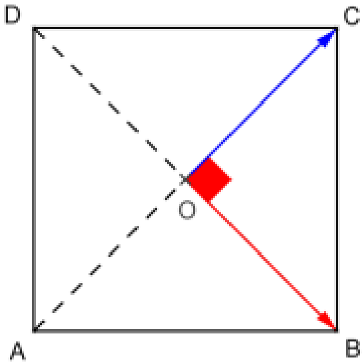
Par conséquent, $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}.\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\| \; = \boldsymbol{a}^2$




2) Calculons $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$.

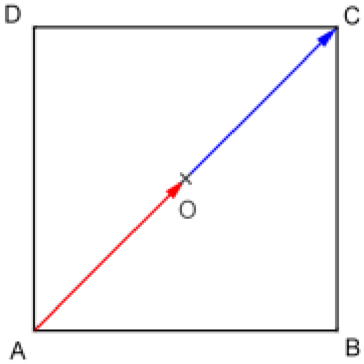
$ABCD$ est un carré donc les droites $(BC)$ et $(BA)$ sont perpendiculaires. Il en résulte que les vecteurs directeurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$ respectifs des droites $(BC)$ et $(BA)$ sont orthogonaux. Par conséquent, $\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}.\overrightarrow{\boldsymbol{BA}} = \mathbf{0}$.

3) Calculons $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OB}$.




$ABCD$ est un carré de centre $O$. Or, les diagonales d'un carré sont perpendiculaires, si bien que l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OB}$ est un angle droit. De ce fait, $\overrightarrow{\boldsymbol{OC}}.\overrightarrow{\boldsymbol{OB}} = \mathbf{0}$.

4) Calculons $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AO}$.



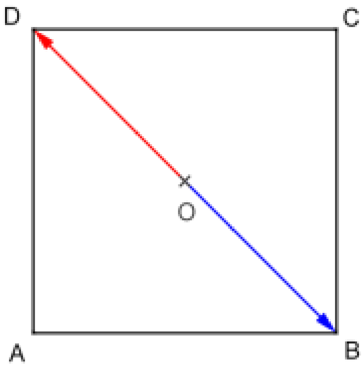

$O$ est le centre de $ABCD$ donc $O$ est le milieu des diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du carré. Autrement dit, les points $A$, $O$ et $C$ sont alignés dans cet ordre. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AO}$ sont par conséquent colinéaires et de même sens, d'où :

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AO} = \|\overrightarrow{AC}\| \times \|\overrightarrow{AO}\| = AC \times AO = AC \times AC/2 = AC^2/2.$$

Or, $ABCD$ est un carré donc $BC$ est rectangle en $B$. Ainsi, d'après le théorème de Pythagore, on a $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$.

Par conséquent, $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}.\overrightarrow{\boldsymbol{AO}} = AC^2/2 = 2a^2/2 = \boldsymbol{a}^2$.

5) Calculons $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OD}$.



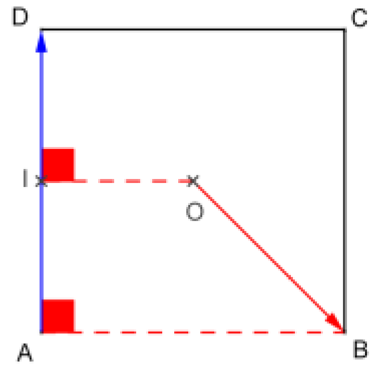

$O$ est le milieu de $[BD]$ donc les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires et de sens contraires.

Ainsi, $\overrightarrow{\boldsymbol{OB}}.\overrightarrow{\boldsymbol{OD}} = -\|\overrightarrow{OB}\| \times \|\overrightarrow{OD}\| = -BD/2 \times BD/2 = -BD^2/4$

Or, $ABCD$ est un carré donc ses diagonales sont de même mesure ; d'où $BD = AC$. Ainsi, d'après ce qui précède, $BD^2 = AC^2 = 2a^2$.

Il vient alors que $\overrightarrow{\boldsymbol{OB}}.\overrightarrow{\boldsymbol{OD}} = -BD^2/4 = -2a^2/4 = -\boldsymbol{a^2/2}$.

6) Calculons $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{OB}$.




Soit $I$ le milieu de $[AD]$. Alors $I$ est le projeté orthogonal de $O$ sur $(AD)$. En outre, $A$ est le projeté orthogonal de $B$ sur $(AD)$.

Autrement dit, $\overrightarrow{IA}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{OB}$ sur $(AD)$. D'où $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{IA}$.

Or, les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{IA}$ sont colinéaires et de sens contraires donc $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{IA} = -\|\overrightarrow{AD}\| \times \|\overrightarrow{IA}\| = -AD \times IA = -a \times \frac{a}{2} = -\frac{1}{2}a^2$.

En conclusion, $\boldsymbol{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{OB} = -a^2/2}$.

**Remarque importante :** Dans cet exercice, on peut également définir un repère orthonormé du plan, par exemple le repère $(A\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ avec $\vec{\imath} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{\jmath} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AD}$. Dès lors, il suffit de noter les coordonnées des points : $(0\,;0)$, $B(a\,;0)$, $C(a\,;a)$, $D(0\,;a)$ et $O(a/2\,;a/2)$. Ensuite, il convient de déterminer les coordonnées des vecteurs intervenant dans les produits scalaires.

Le repère $(A\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ est orthonormé car :

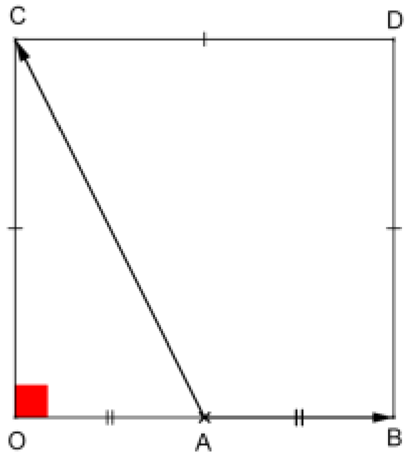
$$\begin{cases} \|\vec{\imath}\| = \frac{1}{a}\|\overrightarrow{AB}\| = \frac{1}{a} \times a = 1 \\ \|\vec{\jmath}\| = \frac{1}{a}\|\overrightarrow{AD}\| = \frac{1}{a} \times a = 1 \\ \vec{\imath}.\vec{\jmath} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}.\frac{1}{a}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{a^2}\underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}}_{=0} = 0 \end{cases}.$$

Calculons par exemple $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{OB}$. Les vecteur $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{OB}$ ont pour coordonnées respectives $\binom{0}{a}$ et $\binom{-\ a/2}{-\ a/2}$. Il vient alors que $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{OB} = 0 \times (-a/2) + a \times (-a/2) = -a^2/2$.

## *Exercice 9*

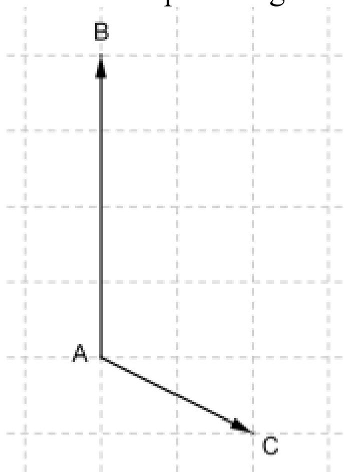
Pour chacune des figures suivantes, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

1) $OBDC$ est un carré de côté $5$ et $A$ est le milieu de $[OB]$.



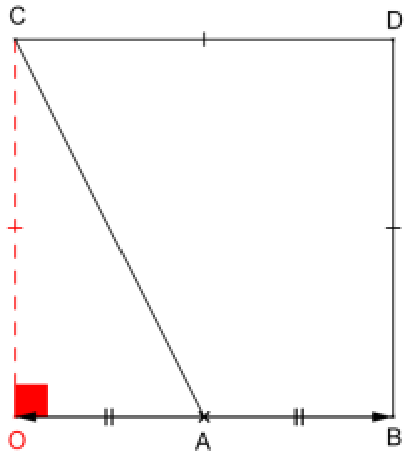

2) $ABC$ est un triangle isocèle en $C$, tel que $AB = 4$.


3) L'unité choisie est le côté d'un carré du quadrillage.



## *Correction de l'exercice 9*

1) Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.




$BDC$ est un carré donc $O$ est le projeté orthogonal de $C$ sur $(OB)$. De plus, comme $A$ est le milieu de $[OB]$, $A \in (OB)$. Autrement dit, $O$ est le projeté orthogonal de $C$ sur $(AB)$.

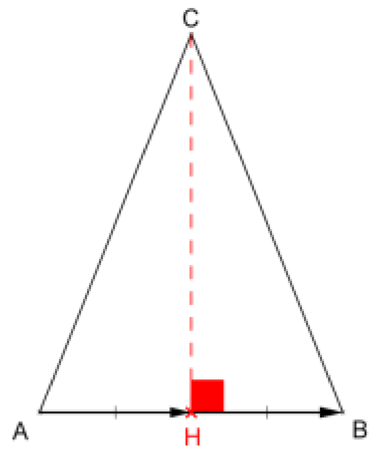
De plus, $A \in (AB)$ donc $A$ est son propre projeté orthogonal sur $(AB)$.

Finalement, le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AC}$ sur $(AB)$ est le vecteur $\overrightarrow{AO}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO}$. Comme $A$ est le milieu de $OB]$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AO}$ sont colinéaires mais de sens contraires et $AB = AO = \frac{OB}{2} = \frac{5}{2}$.

Donc $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO} = -\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AO}\| = -\frac{5}{2} \times \frac{5}{2} = -\boldsymbol{\frac{25}{4}}$.

2) Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.




Le triangle $ABC$ est isocèle en $C$ donc la droite issue de $C$ et passant par le milieu du segment $[AB]$ est un axe de symétrie du triangle et en particulier une médiatrice. En notant $H$ le milieu de $[AB]$, $H$ est alors le projeté orthogonal de $C$ sur $(AB)$.

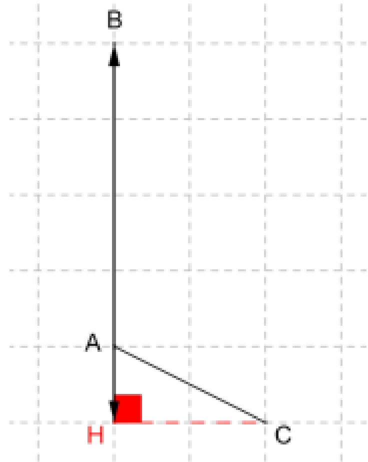
De plus, $A \in (AB)$ donc $A$ est son propre projeté orthogonal sur $(AB)$.

Finalement, le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AC}$ sur $(AB)$ est le vecteur $\overrightarrow{AH}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$. Comme les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de même sens, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AH}\| = AB \times AH$.

Comme $H$ est le milieu de $[AB]$, alors $AH = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2$. Donc $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}} = AB \times AH = 4 \times 2 = \mathbf{8}$.

3) Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.




Afin d'utiliser le quadrillage, la seule projection orthogonale exploitable simplement est la projection orthogonale sur la droite $(AB)$. Notons alors $H$ le projeté orthogonal de $C$ sur $(AB)$ et remarquons que le projeté orthogonal de $A$ sur $(AB)$ est $A$ lui-même car $A \in (AB)$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$. Comme les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de sens contraires, alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = -\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AH}\|$.

Par ailleurs, $AB = 4$ et $AH = 1$.

Donc $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = -\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AH}\| = -4 \times 1 = \mathbf{-4}$.

## *Exercice 10*

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ distincts du vecteur nul. On note $\alpha$ la mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$.

Illustrer par une figure chacun des cinq cas suivants et calculer $\vec{u}.\vec{v}$.

1) $\|\vec{u}\| = 5$ $\quad \|\vec{v}\| = 2$ $\quad \alpha = \dfrac{\pi}{4}$
2) $\|\vec{u}\| = 3$ $\quad \|\vec{v}\| = \dfrac{3}{2}$ $\quad \alpha = \dfrac{\pi}{6}$
3) $\|\vec{u}\| = 4$ $\quad \|\vec{v}\| = 1$ $\quad \alpha = \pi$
4) $\|\vec{u}\| = \dfrac{3}{2}$ $\quad \|\vec{v}\| = \dfrac{5}{2}$ $\quad \alpha = \dfrac{2\pi}{3}$
5) $\|\vec{u}\| = 1$ $\quad \|\vec{v}\| = 2$ $\quad \alpha = \dfrac{\pi}{2}$

## *Correction de l'exercice 10*

**Rappel : Produit scalaire, normes de vecteurs et angle orienté**

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})$.

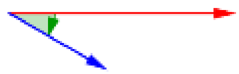
Représentons en rouge le vecteur $\vec{u}$, en bleu le vecteur $\vec{v}$ et en vert l'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v}) = \alpha$ dans le sens trigonométrique.

1) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = 5 \times 2 \times \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 10 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = 5\sqrt{2}}$

2) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = 3 \times \dfrac{3}{2} \times \cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{9}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}}$

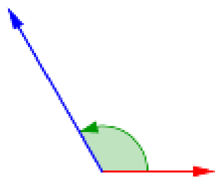


3) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = 4 \times 1 \times \cos(\pi) = 4 \times (-1)$

$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \quad 4}$

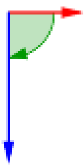
4) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{5}{2} \times \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$

$\vec{u}.\vec{v} = \dfrac{15}{4} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\dfrac{15}{8}}$



5) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = 1 \times 2 \times \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 2 \times 0$

$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = 0}$



**Remarque importante :**

- Si l'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$ forme un angle aigu, alors le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ est positif. *(cas 1 et 2)*
- Si l'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$ forme un angle obtus, alors le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ est négatif. *(cas 3 et 4)*
- Si l'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$ forme un angle droit, alors le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ est nul. *(cas 5)*

## *Exercice 11*

Soient trois points $A$, $B$ et $C$ du plan tels que $AB = 4$, $AC = 3$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -10$. Dans chacun des 3 cas suivants, justifier si les affirmations sont vraies ou fausses.

1) Les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés.
2) $\widehat{BAC} = \pi/7$
3) $BC = 2\sqrt{11}$

## *Correction de l'exercice 11*

1) Si les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés, alors $|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}| = AB \times AC$.

   Or, d'une part $|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}| = |-10| = 10$ et d'autre part $AB \times AC = 4 \times 3 = 12$. En conséquence, $|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}| \neq AB \times AC$. **L'affirmation est fausse.**

2) Si $\widehat{BAC} = \pi/7$, alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} > 0$ puisque $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) > 0$.

   Or, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -10$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} < 0$. **L'affirmation est fausse.**

3) Si $BC = 2\sqrt{11}$, alors $BC^2 = \left(2\sqrt{11}\right)^2 = 2^2 \times \sqrt{11}^2 = 4 \times 11 = 44$.

   Or, $BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \underbrace{\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2}_{\substack{\text{décomposition} \\ \text{par la relation} \\ \text{de Chases}}} = \underbrace{\overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}}_{\text{identité remarquable}} = AB^2 + AC^2 \underbrace{-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}_{\text{linéarité}}$

   $= 4^2 + 3^2 - 2 \times (-10) = 16 + 9 + 20 = 45$. Ainsi, $BC^2 \neq 13$. **L'affirmation est fausse.**

**Remarque :** Pour infirmer les deux premières affirmations, on pouvait également utiliser directement l'expression $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$. Ainsi, cette expression aurait permis d'établir que :

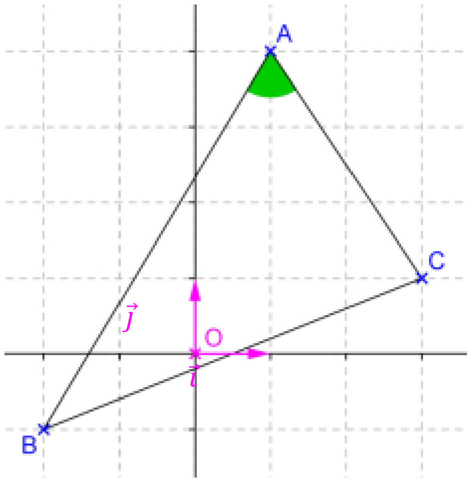
$$\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{-10}{4 \times 3} = \frac{-5}{6}$$

A l'aide de la calculatrice, $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{5}{6} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \approx 146°$ (arrondi au degré près par défaut).

## Exercice 12

Soient les points $A(1\,;4)$, $B(-2\,;\,-1)$ et $C(3\,;1)$ dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$. Donner la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondie au dixième.

## Correction de l'exercice 12




On sait que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})$. D'où la relation :

$$\cos(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$$

- Commençons par calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 1 \\ -1 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 1 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Il en résulte que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -3 \times 2 + (-5) \times (-3) = -6 + 15 = 9$.

- Déterminons désormais $AB$ et $AC$.

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

$$AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

- Calculons maintenant $\cos(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})$.

$$\cos(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{9}{\sqrt{34} \times \sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{442}} = \frac{9\sqrt{442}}{442}$$

Dès lors, il résulte que $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) \approx 64{,}7°$ (arrondi au dixième de degré par excès). **L'angle $\widehat{BAC}$ mesure $64,7°$ au dixième de degré près.**

## Exercice 13

On dit que quatre points $A$, $B$, $C$ et $D$ forment un quadrangle orthocentrique si chacun de ces points est l'orthocentre du triangle ayant pour sommets les trois autres points.

Dans un repère orthonormé du plan, on donne les points $A(5\,;\,0)$, $B(-1\,;\,-2)$, $C(11\,;\,-8)$ et $D(7\,;\,4)$. Ces points forment-ils un quadrangle orthocentrique ?

## Correction de l'exercice 13

Pour montrer que les points A $(5\,;\,0)$, $B(-1\,;\,-2)$, $C(11\,;\,-8)$ et $D(7\,;\,4)$ forment un quadrangle orthocentrique, il faut montrer que :

1) est l'orthocentre du triangle $BCD$.
2) $B$ est l'orthocentre du triangle $ACD$.
3) $C$ est l'orthocentre du triangle $ABD$.
4) $D$ est l'orthocentre du triangle $ABC$.

Les points sont placés dans un repère orthonormé et nous avons :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}12\\6\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-4\\12\end{pmatrix}$

1) Commençons par voir si $A$ est l'orthocentre du triangle $BCD$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} =$ - $6 \times (-4) + (-2) \times 12 = 24 - 24 = 0$ donc $(AB) \perp (CD)$. Autrement dit, le point $A$ appartient à la hauteur de $BCD$ issue de $B$.

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 6 \times 8 + (-8) \times 6 = 48 - 48 = 0$ donc $(AC) \perp (BD)$. Autrement dit, le point B appartient à la hauteur de $BCD$ issue de $C$.

Par conséquent, $A$ est le point de concours de deux hauteurs du triangle $BCD$ : $A$ est l'orthocentre de $BCD$.

2) Voyons si $B$ est l'orthocentre du triangle $ACD$.

D'après ce qui précède, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ donc le point $B$ appartient à la hauteur de $ACD$ issue de $A$.

D'autre part, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} = 12 \times 2 + (-6) \times 4 = 24 - 24 = 0$ donc le point $B$ appartient à la hauteur de $ACD$ issue de $C$.

Par conséquent, $B$ est le point de concours de deux hauteurs du triangle $ACD$ : $B$ est l'orthocentre de $ACD$.

3) Voyons si $C$ est l'orthocentre du triangle $ABD$.

Il a été établi plus haut que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$ donc le point $C$ appartient à la hauteur de $ABD$ issue de $D$.

En outre, d'après ce qui précède, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} = 0$ donc le point $C$ appartient à la hauteur de $ABD$ issue de $B$.

Comme $C$ est le point de concours de deux hauteurs du triangle $ABD$, il résulte que $C$ est l'orthocentre de $ABD$.

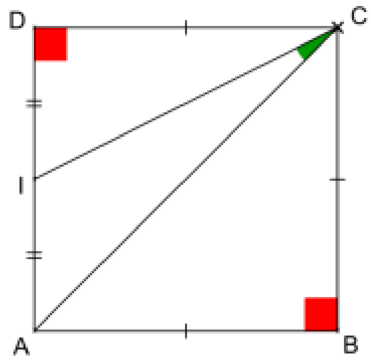
4) Selon un raisonnement analogue au 3), on montre également que $D$ est l'orthocentre du triangle $ABC$.

Conclusion : **Les points $A$, $B$, $C$ et $D$ forment un quadrangle orthocentrique**.

## *Exercice 14*

Soit un carré $ABCD$ de côté $a$, tel que $I$ est le milieu de $[AD]$. Montrer que la mesure de l'angle $\widehat{ACI}$ est indépendante de $a$.

## Correction de l'exercice 14




$ABCD$ est un carré de côté $a$ donc le triangle $ABC$ est rectangle isocèle en $B$. D'après le théorème de Pythagore, on a : $CA^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$.

De même, du fait de la nature de $ABCD$, et comme $I$ est le milieu de $[AD]$, le triangle $DCI$ est rectangle en $D$. Alors, d'après le théorème de Pythagore, on a : $CI^2 = CD^2 + DI^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}$.

Par définition,

$$\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{CI}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{CI} - \overrightarrow{CA}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(CI^2 + CA - \left\|\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{AC}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}(CI^2 + CA^2 - \mathrm{A}I^2)$$

Or, comme $I$ est le milieu de $AD]$, $AI^2 = \left(\frac{AD}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$. Ainsi, on obtient que :

$$\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4} + 2a^2 - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{1}{2}(3a^2) = \frac{3a^2}{2}$$

De surcroît,

$$\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CA} = \left\|\overrightarrow{CI}\right\| \times \left\|\overrightarrow{CA}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{CI}\,;\overrightarrow{CA}\right) = \sqrt{\frac{a^2}{4}} \times \sqrt{2a^2} \times \cos\left(\overrightarrow{CI}\,;\overrightarrow{CA}\right) = \sqrt{\frac{a^2}{4} \times 2a^2} \times \cos\left(\overrightarrow{CI}\,;\overrightarrow{CA}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{a^4}{2}} \times \cos\left(\overrightarrow{CI}\,;\overrightarrow{CA}\right) = a^2\sqrt{\frac{}{2}} \times \cos\left(\overrightarrow{CI}\,;\overrightarrow{CA}\right)$$

En résumé, $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CA} = \frac{3a^2}{2} = a^2\sqrt{\frac{5}{2}} \times \cos\left(\overrightarrow{CI}\,;\overrightarrow{CA}\right)$. Il résulte alors de cette dernière égalité que :

$$\cos\left(\overrightarrow{CI}\,;\overrightarrow{CA}\right) = \frac{\frac{3a^2}{2}}{a^2\sqrt{\frac{5}{2}}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}} = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3 \times \sqrt{2 \times}}{2 \times \sqrt{5}^2} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Le cosinus de l'angle $\left(\overrightarrow{CI}\,;\overrightarrow{CA}\right)$ est constant donc **la mesure de l'angle $\widehat{ACI}$ est indépendante de la mesure $a$ du côté du carré $ABCD$**. En l'occurrence, l'angle mesure toujours $18{,}43°$ (arrondi au centième de degré près par défaut).

## *Exercice 15*

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, on donne les points $(-1\,;\,2)$ et $B(3\,;\,4)$. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice de $[AB]$.

## *Correction de l'exercice 15*

**Rappel : Equation cartésienne de droite**

Soit une droite $(d)$ du plan. Il existe 3 réels $a$, $b$ et $c$ tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ tels que $(d)$ soit l'ensemble des points $M$ de coordonnées $(x\,;y)$ qui vérifient l'équation $ax + by + c = 0$. L'équation $ax + by + c = 0$ est appelée équation cartésienne de $(d)$.

Soit $I$ le milieu de $[AB]$ et soit $(d)$ la médiatrice de $[AB]$. Tout point $M(x\,;\,y)$ du plan appartient à $(d)$ si et seulement si les droites $(IM)$ et $(AB)$ sont perpendiculaires. Autrement dit, on a :

$M(x\,;y) \in (d) \Leftrightarrow (IM) \perp (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0$.

Or, le point $I$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}\right)$, c'est-à-dire $I(1\,;3)$. Il s'ensuit que le vecteur $\overrightarrow{IM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_M - x_I \\ y_M - y_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 3 \end{pmatrix}$. Enfin, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - y_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, on a :

$M(x\,;y) \in (d) \Leftrightarrow (IM) \perp (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1) \times 4 + (y - 3) \times 2 = 0$

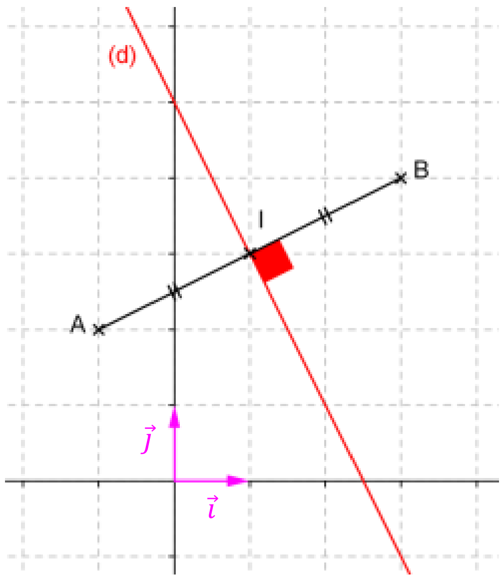
$\Leftrightarrow 4x - 4 + 2y - 6 = 0$

$\Leftrightarrow 4x + 2y - 10 = 0$

$\Leftrightarrow 2(2x + y - 5) = 0$

$\Leftrightarrow 2x + y - 5 = 0$

**Une équation cartésienne de la médiatrice $(d)$ de $[AB]$ est $2x + y - 5 = 0$.**

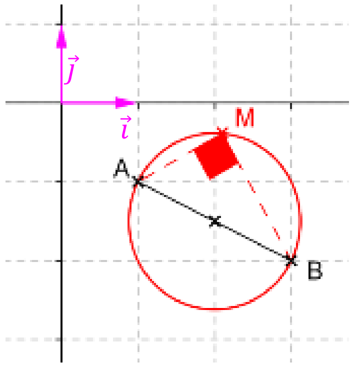



## *Exercice 16*

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$, sachant que les points $A$ et $B$ ont pour coordonnées respectives $(1\,;\,-1)$ et $(3\,;\,-2)$.

## Correction de l'exercice 16

Tout point $(x\,;\,y)$ du plan appartient au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ si et seulement si le triangle $ABM$ est rectangle en $M$. Autrement dit, on a :




$(x;y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x-3 \\ y+2 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-3) + (y+1)(y+2) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x - x + 3 + y^2 + 2y + y + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 + 3y + 5 = 0$

**Une équation du cercle de diamètre $[AB]$ est $x^2 - 4x + y^2 + 3y + 5 = 0$.**

## Exercice 17

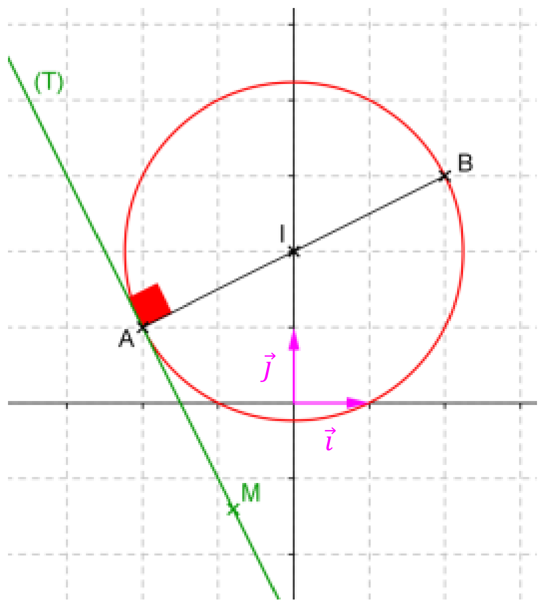
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on donne les points $A(-2\,;\,1)$ et $B(2\,;3)$. Déterminer une équation de la tangente au cercle de diamètre $[AB]$ et passant par $A$.

## Correction de l'exercice 17

Soit $I$ le milieu de $[AB]$, soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$ et soit $(T)$ la tangente à $\mathcal{C}$ en $A$.

Tout point $(o,x\,;\,y)$ du plan appartient à $(T)$ si et seulement si le triangle $IAM$ est rectangle en $A$, c'est-à-dire si et seulement si $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM} = 0$.

Or, $I$ est le milieu de $[AB]$ donc le point $I$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}\right)$, c'est-à-dire $I(0\,;2)$.




En outre, les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AM}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, on a :

$(x;y) \in T) \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow 2(x+2) + 1(y-1) = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 4 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 3 = 0$

**Une équation cartésienne de la tangente $T)$ au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ est $2x + y + 3 = 0$.**

# *Exercice 18*

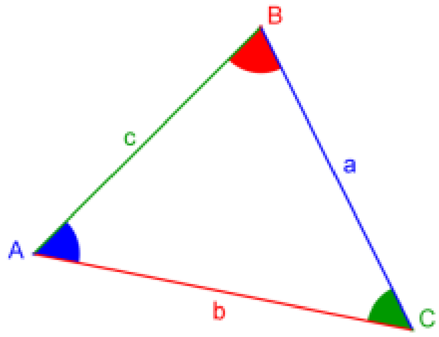
Démontrer que la somme des carrés des côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés de ses diagonales.

## *Correction de l'exercice 18*

**Rappel : Théorème d'Al-Kashi (également appelé Théorème de Pythagore généralisé)**

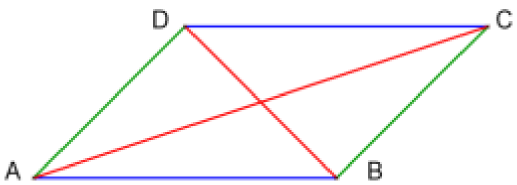
Soit un triangle $ABC$ quelconque. Alors, on a les relations suivantes :

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$



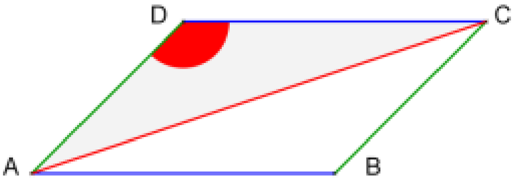

Soit un parallélogramme $ABCD$.

Démontrons que $\underbrace{AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2}_{\substack{\text{somme des carrés} \\ \text{des côtés} \\ \text{du parallélogramme}}} = \underbrace{AC^2 + BD^2}_{\substack{\text{somme des carrés} \\ \text{des diagonales} \\ \text{du parallélogramme}}}$.



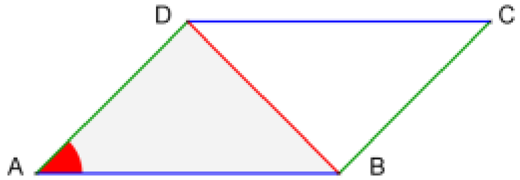

D'après le théorème d'Al-Kashi, on a :

- dans le triangle $ADC$ :




$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \times AD \times DC \times \cos\hat{D}$

- dans le triangle $ABD$ :




$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2 \times AD \times AB \times \cos\hat{A}$

En additionnant membre à membre ces égalités, on obtient :

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \times AD \times DC \times \cos\hat{D} + AD^2 + AB^2 - 2 \times AD \times AB \times \cos\hat{A}$$

Or, $ABCD$ est un parallélogramme donc ses côtés opposés sont de même longueur et deux angles consécutifs sont supplémentaires. Autrement dit, on a en particulier les relations suivantes :

- $AD = BC$
- $AB = DC$
- $\hat{A} + \hat{D} = \pi$

Ainsi, $AC^2 + BD^2 = AD^2 + DC^2 + BC^2 + AB^2 - 2 \times AD \times DC \times \left(\cos\hat{D} + \cos\left(\pi - \hat{D}\right)\right)$

Or, $\cos\left(\pi - \hat{D}\right) = -\cos\hat{D}$ donc $\cos\hat{D} + \cos\left(\pi - \hat{D}\right) = \cos\hat{D} - \cos\hat{D} = 0$.

Par conséquent, $\boldsymbol{AC}^2 + \boldsymbol{BD}^2 = \boldsymbol{AB}^2 + \boldsymbol{BC}^2 + \boldsymbol{CD}^2 + \boldsymbol{DA}^2$. Autrement dit, la somme des carrés des côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés de ses diagonales.

## *Exercice 19*

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, on donne les points $(3\,;\,1)$ et $B(-1\,;\,3)$. Déterminer une équation cartésienne des tangentes au cercle de diamètre $[AB]$, passant par $C(-2\,;\,5)$.

## *Correction de l'exercice 19*

Notons $I$ le milieu de $[AB]$, $\mathcal{C}$ le cercle de centre $I$ et de diamètre $[AB]$ et $(t)$ la tangente à $\mathcal{C}$ en $H(x\,;y)$, passant par $C(-2\,;\,5)$.

$(t)$ est la tangente à $\mathcal{C}$ en $H$, passant par $C$ donc $H$ est le point d'intersection de $(t)$ et $\mathcal{C}$. Par conséquent, les droites $(CH)$ et $(IH)$ sont orthogonales et $IH$ est un rayon du cercle $\mathcal{C}$. Autrement dit, $H$ est le point d'intersection de $(t)$ et $\mathcal{C}$ si et seulement si $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{IH} = 0$ et $HI = AI$.

$I$ le milieu de $[AB]$ donc $I$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\,\frac{y_A+y_B}{2}\right)$, c'est-à-dire $I(1\,;2)$.

D'une part, $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{IH} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+2 \\ y-5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) + (y-5)(y-2) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x + 2x - 2 + y^2 - 2y - 5y + 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + y^2 - 7y + 8 = 0$

D'autre part, $HI = AI \Leftrightarrow HI^2 = AI^2 \Leftrightarrow (x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = (x_A - x_I)^2 + (y_A - y_I)^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = (3-1)^2 + (1-2)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 2^2 + (-1)$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$

$H$ est le point d'intersection de $(t)$ et $\mathcal{C}$ donc ses coordonnées vérifient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x^2 + x + y^2 - 7y + 8 = 0\ (L1) \\ x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0\ (L2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0\ (L2 \to L1) \\ 3x - 7y + 4y + 8 = 0\ (L1 - L2 \to L2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0\ (L1) \\ 3x - 3y + 8 = 0\ (L2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0\ (L1) \\ x = \dfrac{3y-8}{3}\ (L2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y - \dfrac{8}{3}\ (L2 \to L1) \\ \left(y - \dfrac{8}{3}\right)^2 - 2 \times \left(y - \dfrac{8}{3}\right) + y^2 - 4y = 0\ (L1 \to L2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - \dfrac{8}{3}\ (L1) \\ y^2 - \dfrac{16}{3}y + \dfrac{64}{9} - 2y + \dfrac{16}{3} + y^2 - 4y = 0\ (L2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y - \dfrac{8}{3} \ (L1) \\ 9y \ \ - 48y + 64 - 18y + 48 + 9y \ \ - 36y = 0 \ (9 \times L2 \to L2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y - \dfrac{8}{3} \ (L1) \\ 18y^2 - 102y + 112 = 0 \ (L2) \end{cases} \quad \begin{cases} x \ = y - \dfrac{8}{3} \ (L1) \\ 9y \ \ - 51y + 56 = 0 \ (L2/2 \to L2) \end{cases}$$

Soit $\Delta$ le discriminant du trinôme $9y^2 - 51y + 56$ du second degré d'inconnue $y$.

$\Delta = (-51)^2 - 4 \times 9 \times 56 = 585 = 9 \times 65$

$\Delta > 0$ donc le trinôme $9y^2 - 51y + 56$ admet deux racines réelles distinctes $y_1$ et $y_2$.

$$y_1 = \frac{-(-51) - \sqrt{9 \times 65}}{2 \times 9} = \frac{51 - 3\sqrt{65}}{18} = \frac{17 - \sqrt{65}}{6}$$

$$y_2 = \frac{-(-51) + \sqrt{9 \times 65}}{2 \times 9} = \frac{51 + 3\sqrt{65}}{18} = \frac{17 + \sqrt{65}}{6}$$

$$\begin{cases} x \ = y - \dfrac{8}{3} \ (L1) \\ 9y \ \ - 51y + 56 = 0 \ (L2/2 \to L2) \end{cases} \quad \begin{cases} x \ = y - \dfrac{8}{3} \ (L1) \\ y_1 = \dfrac{17 - \sqrt{65}}{6} \ ou \ y_2 = \dfrac{17 + \sqrt{65}}{6} \ (L2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ = y - \dfrac{8}{3} \ (L1) \\ y_1 = \dfrac{17 - \sqrt{65}}{6} \ ou \ y_2 = \dfrac{17 + \sqrt{65}}{6} \ (L2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{17 - \sqrt{65}}{6} \\ x_1 = y_1 - \dfrac{8}{3} \end{cases} ou \begin{cases} y_2 = \dfrac{17 + \sqrt{65}}{6} \\ x_2 = y_2 - \dfrac{8}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{17 - \sqrt{65}}{6} \\ x_1 = \dfrac{17 - \sqrt{65}}{6} - \dfrac{8}{3} \end{cases} ou \begin{cases} y_2 = \dfrac{17 + \sqrt{65}}{6} \\ x_2 = \dfrac{17 + \sqrt{65}}{6} - \dfrac{8}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = \dfrac{17 - \sqrt{65}}{6} \\ x_1 = \dfrac{17 - \sqrt{65}}{6} - \dfrac{16}{6} \end{cases} ou \begin{cases} y_2 = \dfrac{17 + \sqrt{65}}{6} \\ x_2 = \dfrac{17 + \sqrt{65}}{6} - \dfrac{16}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{17 - \sqrt{65}}{6} \\ x_1 = \dfrac{1 - \sqrt{65}}{6} \end{cases} ou \begin{cases} y_2 = \dfrac{17 + \sqrt{65}}{6} \\ x_2 = \dfrac{1 + \sqrt{65}}{6} \end{cases}$$

Il existe donc deux points $H_1$ et $H_2$ d'intersection de $(t)$ et $\mathcal{C}$, de coordonnées respectives :

$$\left(\frac{1 - \sqrt{65}}{6} \ ; \ \frac{17 - \sqrt{65}}{6}\right) \text{ et } \left(\frac{1 + \sqrt{65}}{6} \ ; \ \frac{17 + \sqrt{65}}{6}\right)$$

Déterminons désormais une équation cartésienne de chacune des tangentes $(t_1)$ et $(t_2)$ passant respectivement par $H_1$ et $H_2$.

$M(x_M \ ; \ y_M) \in (t_1)$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CH_1}$ sont colinéaires et $M(x_M \ ; \ y_M) \in (t_2)$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CH_2}$ sont colinéaires.

**Rappel : Vecteurs colinéaires**

Dans un repère, deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ non nuls sont colinéaires si, et seulement si, $xy' - x'y = 0$.

L'expression $xy' - x'y$ est le **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $det(\vec{u}\,;\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$.

- Les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CH_1}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x_M + 2 \\ y_M - 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{65}}{6} + 2 \\ \frac{17-\sqrt{65}}{6} - 5 \end{pmatrix}$.

$M(x_M\,;\,y_M) \in (t_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CH_1}$ colinéaires

$$\Leftrightarrow (x_M + 2)\left(\frac{17-\sqrt{65}}{6} - 5\right) - (y_M - 5)\left(\frac{1-\sqrt{65}}{6} + 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{17-\sqrt{65}}{6} - 5\right)x_M + \frac{17-\sqrt{65}}{3} - 10 - \left(\frac{1-\sqrt{65}}{6} + 2\right)y_M + \frac{5-5\sqrt{65}}{6} + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-13-\sqrt{65}}{6}x_M + \frac{-13+\sqrt{65}}{6}y_M + \frac{34-2\sqrt{65}}{6} + \frac{5-5\sqrt{65}}{6} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{-13-\sqrt{65}}{6}x_M + \frac{-13+\sqrt{65}}{6}y_M + \frac{39-7\sqrt{65}}{6} = 0}$$

- Les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CH_2}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x_M + 2 \\ y_M - 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{65}}{6} + 2 \\ \frac{17+\sqrt{65}}{6} - 5 \end{pmatrix}$.

$M(x_M\,;\,y_M) \in (t_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CH_2}$ colinéaires

$$\Leftrightarrow (x_M + 2)\left(\frac{17+\sqrt{65}}{6} - 5\right) - (y_M - 5)\left(\frac{1+\sqrt{65}}{6} + 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{17+\sqrt{65}}{6} - 5\right)x_M + \frac{17+\sqrt{65}}{3} - 10 - \left(\frac{1+\sqrt{65}}{6} + 2\right)y_M + \frac{5+5\sqrt{65}}{6} + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-13+\sqrt{65}}{6}x_M + \frac{-13-\sqrt{65}}{6}y_M + \frac{34+2\sqrt{65}}{6} + \frac{5+5\sqrt{65}}{6} = 0$$

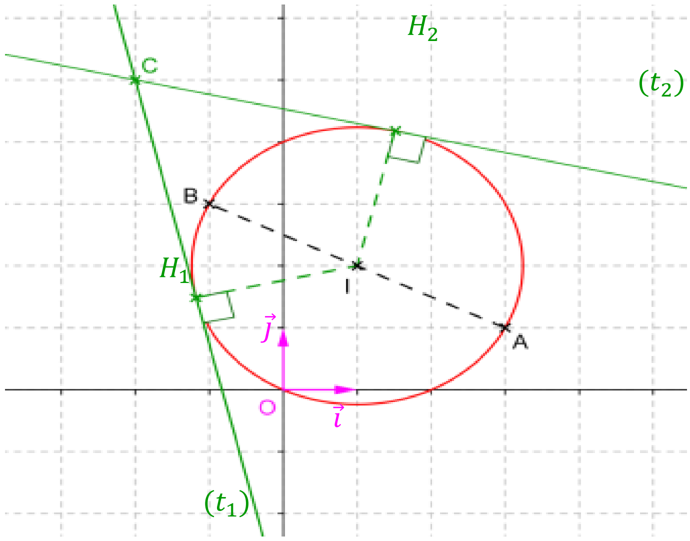
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{-13+\sqrt{65}}{6}x_M + \frac{-13-\sqrt{65}}{6}y_M + \frac{39+7\sqrt{65}}{6} = 0}$$

En conclusion, les tangentes $(t_1)$ et $(t_2)$ au cercle $\mathcal{C}$ passant par $C$ ont pour équations cartésiennes respectives :

$$\frac{-13-\sqrt{65}}{6}x+\frac{-13+\sqrt{65}}{6}y+\frac{39-7\sqrt{65}}{6}=0$$

et

$$\frac{-13+\sqrt{65}}{6}x+\frac{-13-\sqrt{65}}{6}y+\frac{39+7\sqrt{65}}{6}=0$$




## *Exercice 20*

Soit un triangle $ABC$. On note $O$ le centre du cercle circonscrit à ce triangle, $H$ le point du plan défini par $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ et $G$ le point du plan tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

1) Démontrer que $H$ est l'orthocentre du triangle $ABC$.
2) Démontrer que $G$ est le centre de gravité du triangle $ABC$.
3) Démontrer que les points $O$, $H$ et $G$ sont alignés.

## *Correction de l'exercice 20*

1) Démontrons que $H$ est l'orthocentre du triangle $ABC$.

Pour montrer que $H$ est l'orthocentre du triangle $ABC$, commençons par montrer que $H$ appartient à la hauteur du triangle $ABC$, issue de $A$, autrement dit commençons par montrer que $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0$.

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=\Big(\underbrace{\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OH}}_{\text{cf }1}\Big).\overrightarrow{BC}=\Big(\overrightarrow{AO}+\underbrace{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}_{\text{cf }2}\Big).\overrightarrow{BC}=\Big(\underbrace{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}_{\text{cf }3}\Big).\Big(\underbrace{\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}}_{\text{cf }1}\Big)$$

$$=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).\Big(\underbrace{-\overrightarrow{OB}}_{\text{cf }4}+\overrightarrow{OC}\Big)=\Big(\underbrace{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}}_{\text{cf }5}\Big).\Big(\underbrace{\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}}_{\text{cf }5}\Big)=\underbrace{\overrightarrow{OC}^2-\overrightarrow{OB}^2}_{\text{cf }6}=\quad C^2-\quad B^2=\underbrace{0}_{\text{cf }7}$$

Explications :

1- On utilise la relation de Chasles en introduisant le point $O$.
2- On utilise l'égalité de l'énoncé définissant le point $H$, à savoir $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.
3- La somme de vecteurs opposés est égale au vecteur nul ; ici, $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA}=\vec{0}$.

4- On met en évidence l'opposée du vecteur opposé ; ici, $\overrightarrow{BO} = -\overrightarrow{OB}$.
5- On permute les vecteurs pour mettre en évidence le produit scalaire $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})$
6- On applique l'identité remarquable $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$
7- $O$ est le centre du cercle circonscrit au triangle $ABC$ donc $OA = OB = OC$. D'où $OA^2 = OB^2 = OC^2$.

$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$ donc $H$ appartient à la hauteur du triangle $ABC$, issue de $A$.

Par un raisonnement analogue, on montre que $H$ appartient à la hauteur du triangle $ABC$, issue de $B$. En effet :

$$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = \left(\underbrace{\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OH}}_{\text{cf }1}\right).\overrightarrow{AC} = \left(\underbrace{\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}_{\text{cf }2}\right).\overrightarrow{AC} = \left(\underbrace{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}}_{\text{cf }3}\right).\left(\underbrace{\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}}_{\text{cf }1}\right)$$

$$= (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}).\left(\underbrace{-\overrightarrow{OA}}_{\text{cf }4}+\overrightarrow{OC}\right) = \left(\underbrace{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}}_{\text{cf }5}\right).\left(\underbrace{\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}}_{\text{cf }5}\right) = \underbrace{\overrightarrow{OC}^2-\overrightarrow{OA}^2}_{\text{cf }6} = OC^2 - OA^2 = \underbrace{0}_{\text{cf }7}$$

$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0$ donc $H$ appartient à la hauteur du triangle $ABC$, issue de $B$.

Par conséquent, $H$ est le point de concours de deux hauteurs du triangle $ABC$ : $H$ est l'orthocentre de $ABC$.

2) Démontrons que $G$ est le centre de gravité du triangle $ABC$.

Pour montrer que $G$ est le centre de gravité du triangle $ABC$, commençons par montrer que $G$ appartient à la médiane du triangle $ABC$, issue de $A$.

Notons $A'$, $B'$ et $C'$ les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \underbrace{\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'C}}_{\text{cf }1} = 3\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'A}+\underbrace{\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}}_{\text{cf }2} = 3\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'A}$$

Explications :

1- On utilise la relation de Chasles en introduisant le milieu $A'$ de $[BC]$.
2- $A'$ est le milieu de $[BC]$ donc $\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C} = \vec{0}$.

Or, par définition du point $G$, $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ donc $3\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'A} = \vec{0}$. Autrement dit, les vecteurs $\overrightarrow{GA'}$ et $\overrightarrow{A'A}$ sont colinéaires : les points $G$, $A'$ et $A$ sont alignés. Comme $(A'A)$ désigne la médiane du triangle $ABC$, issue de $A$, on en déduit que $G \in (A'A)$.

Par un raisonnement analogue, on montre que $G$ appartient à la médiane du triangle $ABC$, issue de $B$. En effet :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \underbrace{\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{B'A}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{B'C}}_{\text{cf }1} = 3\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{B'B}+\underbrace{\overrightarrow{B'A}+\overrightarrow{B'C}}_{\text{cf }2} = 3\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{B'B}$$

Explications :

1- On utilise la relation de Chasles en introduisant le milieu $B'$ de $[AC]$.
2- $B'$ est le milieu de $[AC]$ donc $\overrightarrow{B'A}+\overrightarrow{B'C} = \vec{0}$.

Comme, par définition du point $G$, $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, il vient que $3\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{B'B}$. Autrement dit, les vecteurs $\overrightarrow{GB'}$ et $\overrightarrow{B'B}$ sont colinéaires : les points $G$, $B'$ et $B$ sont alignés. Comme $(B'B)$ désigne la médiane du triangle $ABC$, issue de $B$, on en déduit que $G \in (B'B)$.

Par conséquent, $G$ appartient à deux médianes du triangle $ABC$ : $G$ est le centre de gravité de $ABC$.

3) Démontrer que les points $O$, $H$ et $G$ sont alignés.

Par définition, $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$. En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC}$ $\quad 3\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$ $\quad 3\overrightarrow{OG}$ car $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Ainsi, la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OG}$ prouve l'alignement des points $O$, $H$ et $G$. Autrement dit, **dans un triangle, l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit sont 3 points alignés** (voire confondus dans certains cas particuliers).

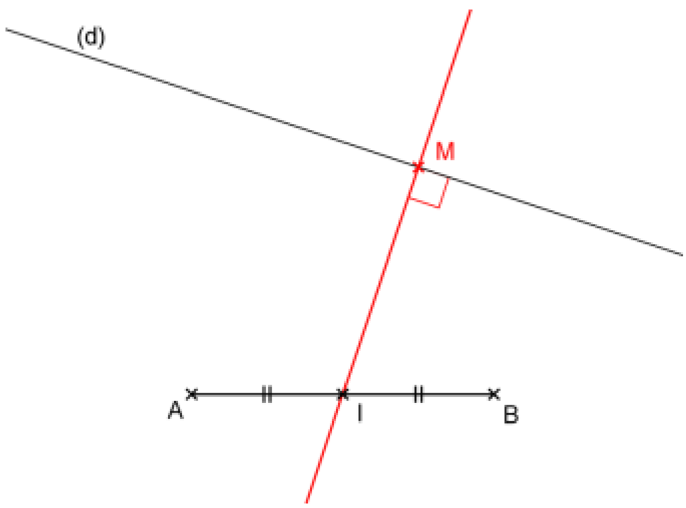
**Remarque :** Ces 3 points appartiennent à une même droite, appelée « droite d'Euler ».

## *Exercice 21*

et $B$ sont deux points du plan tels que $AB\ =4$. $(d)$ désigne une droite ne passant ni par $A$, ni par $B$. $M$ est un point libre de $(d)$. Déterminer la position du point $M$ de sorte que $MA^2+MB^2$ soit minimale.

## *Correction de l'exercice 21*

Soit $I$ le milieu de $[AB]$.




$MA^2+MB^2 = \overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2$

$=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

$=\left(\overrightarrow{MI}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2$

$=\overrightarrow{MI}^2-\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2$

$=2\overrightarrow{MI}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 = 2MI^2+\frac{1}{2}AB^2 = 2MI^2+\frac{1}{2}\times 4^2$

$=MI^2+8$

$MA^2+MB^2$ est donc minimale quand $MI^2$ est minimale, c'est-à-dire quand $(MI)$ et $(d)$ sont perpendiculaires.

# Chapitre 6

# Suites numériques

## I/ Généralités

### a) Définition

**Définition**

Une suite est une fonction définie sur $\mathbb{N}$. Une suite numérique est une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$.
L'image de $n$ par une suite $u$ se note $u_n$ et est appelé terme de rang $n$ de la suite. Une suite $u$ est aussi notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque : On peut aussi définir une suite à partir d'un certain rang.

*Exemple :*

*1/ $u$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{n+2}$.* $u_0 = \dfrac{1}{2}$, $u_1 = \dfrac{1}{3}$, $u_2 = \dfrac{1}{4}$, ...

*2/ $v$ définie pour tout $n \geqslant 3$ par $v_n = \dfrac{1}{n-2}$* $v_3 = 1$, $v_4 = \dfrac{1}{2}$, $v_5 = \dfrac{1}{3}$, ...

### b) Comment générer une suite

Selon le contexte les termes d'une suite peuvent être définis de différentes façons.

#### Explicitement en fonction du rang

– Toute fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ (ou sur un intervalle de la forme $[a\ ;\ +\infty[$) permet de définir une suite.

*Exemple : Calculer les premiers termes de la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 - 5n - 1$.*
$u_0 = 2\times 0^2 - 5\times 0 - 1 = -1$ ; $u_1 = 2\times 1^2 - 5\times 1 - 1 = -4$ ;
$u_2 = 2\times 2^2 - 5\times 2 - 1 = -3$ ; $u_3 = 2\times 3^2 - 5\times 3 - 1 = 2$ ;
$u_4 = 2\times 4^2 - 5\times 4 - 1 = 11$

– Les propriétés des nombres entiers permettent aussi de définir explicitement des suites qui ne peuvent pas être obtenues simplement par une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

*Exemple : Calculer les premiers termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $u_n = (-1)^n$ et $v_n$ est le nombre de diviseurs de $n$.*

$u_0 = 1$ ; $u_1 = -1$ ; $u_2 = 1$ ; $u_3 = -1$ ; ...

$v_1 = 1$ ; $v_2 = 2$ ; $v_3 = 2$ ; $v_4 = 3$ ; $v_5 = 2$ ; $v_6 = 4$ ...

**Par récurrence**

Une suite peut aussi être définie par son premier terme (ou ses premiers termes) et par une relation permettant de calculer chaque terme en fonction du précédent (ou des précédents).

*Exemple : Calculer les premiers termes des suites ci-dessous définies sur* $\mathbb{N}$.

*u est définie par* $\begin{cases} u_0 = -6 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n - 1 \quad \textit{pour tout } n \geqslant 0 \end{cases}$

$u_1 = -\frac{1}{2}u_0 - 1 = -\frac{1}{2} \times (-6) - 1 = 2\,;\ u_2 = -\frac{1}{2}u_1 - 1 = -\frac{1}{2} \times 2 - 1 = -2$

$u_3 = -\frac{1}{2}u_2 - 1 = -\frac{1}{2} \times (-2) - 1 = 0\,;\ u_4 = -\frac{1}{2}u_3 - 1 = -\frac{1}{2} \times 0 - 1 = -1$

*v est définie par* $\begin{cases} v_0 = 1\,;\ v_1 = 1 \\ v_{n+2} = v_{n+1} + v_n \quad \textit{pour tout } n \geqslant 0 \end{cases}$

$v_2 = v_1 + v_0 = 1 + 1 = 2\,;\ v_3 = v_2 + v_1 = 2 + 1 = 3\,;$

$v_4 = v_3 + v_2 = 3 + 2 = 5\,;\ v_5 = v_4 + v_3 = 5 + 3 = 8\,;$

$v_6 = v_5 + v_4 = 8 + 5 = 13$

*w est définie par* $\quad w_0 = 3 \quad$ *et* $\begin{cases} w_{n+1} = \frac{w_n}{2} & \textit{si } w_n \textit{ est pair} \\ w_{n+1} = 3w_n + 1 & \textit{si } w_n \textit{ est impair} \end{cases}$

$w_1 = 3 \times w_0 + 1 = 3 \times 3 + 1 = 10\,;\ w_2 = \frac{w_1}{2} = \frac{10}{2} = 5\,;\ w_3 = 3 \times w_2 + 1 = 3 \times 5 + 1 = 16\,;$

$w_4 = \frac{w_3}{2} = \frac{16}{2} = 8\,;\ w_5 = \frac{w_4}{2} = \frac{8}{2} = 4\,;\ w_6 = \frac{w_5}{2} = \frac{4}{2} = 2$

# II/ Sens de variation

## a) Définition

Une suite étant une fonction, les définitions restent les mêmes :

$u$ est croissante (strict. croissante) si $n < p \Longrightarrow u_n \leqslant u_p$ ($n < p \Longrightarrow u_n < u_p$)
$u$ est décroissante (strict. décroissante) si $n < p \Longrightarrow u_n \geqslant u_p$ ($n < p \Longrightarrow u_n > u_p$)

Cependant, les propriétés des nombres entiers permettent d'établir les résultats suivants :

**Propriété**

$u$ est croissante si et seulement si pour tout entier $n$, $u_n \leqslant u_{n+1}$
$u$ est décroissante si et seulement si pour tout entier $n$, $u_n \geqslant u_{n+1}$

Remarques :

- Ne pas mélanger $u_{n+1}$ et $u_n + 1$
- Dans la pratique, pour déterminer le sens de variation d'une suite, on s'intéresse au signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
- Dans le cas où tous les termes de la suite sont strictement positifs, on peut aussi comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

*Exemple : Déterminer le sens de variation des suites suivantes :*

- *u est définie sur* $\mathbb{N}$ *par* $u_n = 3n + (-1)^n$.

  Étudions la différence $u_{n+1} - u_n$ :
  $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + (-1)^{n+1} - 3n - (-1)^n = 3 - 2 \times (-1)^n > 0$
  La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

- *v est définie sur* $\mathbb{N}$ *par* $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = -v_n^2 + v_n \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

  Étudions la différence $v_{n+1} - v_n$ :
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = -v_n^2 + v_n - v_n = -v_n^2 < 0$
  La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

– *$w$ est définie sur $\mathbb{N}^*$ par* $w_n = \dfrac{2^n}{n}$.

Les termes de la suite sont strictement positifs, on étudie donc le quotient $\dfrac{w_{n+1}}{w_n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{\dfrac{2^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{2^n}{n}} = \dfrac{2^{n+1}}{2^n} \times \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{2n}{n+1}$

Pour tout $n \geqslant 1$, $2n \geqslant n+1$ donc $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} \geqslant 1$.

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante.

## b) Propriété

**Propriété** *Soit $f$ une fonction définie sur $[0; +\infty[$, et $(u_n)$ la suite définie par $u_n = f(n)$, alors*
- *si $f$ est croissante, alors la suite $(u_n)$ est croissante,*
- *si $f$ est décroissante, alors la suite $(u_n)$ est décroissante.*

Démonstration : Si par exemple $f$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors pour tout entier $n$, $f(n+1) > f(n)$, c'est-à-dire exactement que $u_{n+1} > u_n$, donc $(u_n)$ est croissante.

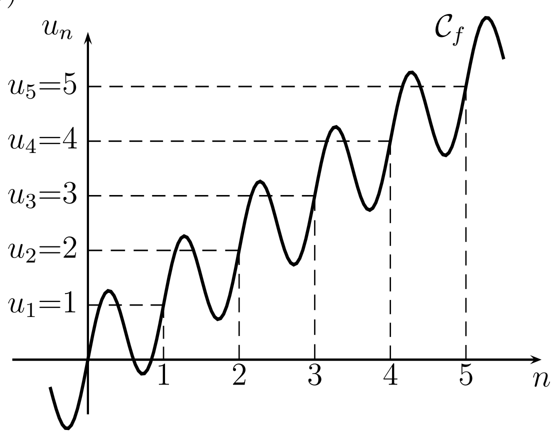
**Exercice :** Etudier le sens de variation des suites d´efinies par les expressions :

- $u_n = \dfrac{3n-2}{n+1}$ • $v_n = -\dfrac{1}{3}n + 3$ • $w_n = (n-5)^2$

Remarque : La réciproque est fausse !

Par exemple, soit la suite $(u_n)$ définie p ar $u_n = f(n)$ avec la fonction $f(x) = x + \sin(2\pi x)$.

Alors, pour tout entier $n$, $u_n = n+\sin(2\pi n) = n$, et donc $(u_n)$ est croissante (c'est la suite des entiers naturels), tandis que $f$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.




**Exercice** :Déterminer le sens de variation des suites suivantes :

- $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n}$ • $v_n = \dfrac{3n-1}{n+2}$ • $w_n = n^2 - 10n + 26$ • $x_n = 2n^3 - 30n^2 + 54n$

## IV/ Suites arithmétiques

**Définition** *Une suite arithmétique est une suite dont chaque terme est obtenu en ajoutant la même quantité $r$, appelée* **raison** *de la suite, au terme précédent.*
*Pour tout entier $n$, $u_{n+1} = u_n + r \iff u_{n+1} - u_n = r$.*

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \xrightarrow{+r} u_4 \xrightarrow{+r} \cdots \quad \cdots \quad u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1} \quad \cdots$$

*Exemples :*
*La suite des nombres impairs est une suite arithmétique de raison 2.*
*Les suites $u$ et $v$ définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n - 4$ et $v_n = n^2 + 2$ sont-elles arithmétiques ?*

- Pour tout $n$, $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 4 - (3n - 4) = 3n + 3 - 4 - 3n + 4 = 3$.
  La suite $u$ est donc arithmétique de raison 3.
- $v_0 = 2$, $v_1 = 3$, $v_2 = 6$ ainsi $v_1 = v_0 + 1$ et $v_2 = v_1 + 3$
  La suite $v$ n'est donc pas arithmétique.

**Exercice** • La suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier $n$ par la relation $u_{n+1} = u_n + 1$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$. On a : $u_1 = u_0 + 1 = 1$, $u_2 = u_1 + 1 = 2$, $u_3 = \quad \ldots$ .
$(u_n)$ est la suite des entiers naturels.

• Soit $(v_n)$ la suite définie par la relation $v_n = 5n + 2$.

Alors, pour tout entier $n$, $v_{n+1} - v_n = \ldots$.

On en déduit que $(v_n)$ est une suite arithmétique de raison $r = \quad \ldots$

• La suite $(w_n)$ définie par la relation $w_n = n^2 + 2$ est-elle arithmétique ?

**Propriété**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r$.
Si $r > 0$ alors $u$ est strictement croissante.
Si $r = 0$ alors $u$ est constante.
Si $r < 0$ alors $u$ est strictement décroissante.

Démonstration immédiate (Pour tout $n$, $u_{n+1} - u_n = r$...)

### b) Expression de $u_n$ en fonction de $n$

**Propriété**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r$.
Pour tous entiers naturels $n$ et $p$ :

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

En particulier, pour tout entier naturel $n$ :

$$u_n = u_0 + nr$$

*Démonstration*

On suppose $n > p$. On a :

$u_n - u_{n-1} = r\,;\quad u_{n-1} - u_{n-2} = r\,;\quad \dots\quad u_{p+2} - u_{p+1} = r\,;\quad u_{p+1} - u_p = r$

En additionnant toutes ces égalités, on obtient :

$$u_n - u_p = (n-p)r$$

soit

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

### c) Somme de termes consécutifs

**Propriété**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r$.
Pour tout entier naturel $n$ :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Remarque : On a aussi $u_1 + u_2 \dots + u_{n-1} + u_n = n \times \dfrac{u_1 + u_n}{2}$

*Démonstration*

Posons $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

On a ainsi $2S = (u_0+u_n)+(u_1+u_{n-1})+(u_2+u_{n-2})+\dots+(u_{n-1}+u_1)+(u_n+u_0)$

Or, pour tout $k \leqslant n$, $u_k + u_{n-k} = u_0 + kr + u_0 + (n-k)r = u_0 + u_0 + nr = u_0 + u_n$.

On a donc : $2S = (n+1) \times (u_0 + u_n)$

Donc $S = (n+1) \times \dfrac{u_0 + u_n}{2}$

*Exemple : Déterminer la somme des $n$ premiers nombres impairs.*

La suite des nombres impairs est la suite arithmétique de raison 2 telle que $u_1 = 1$

$$u_1 + u_2 \dots + u_{n-1} + u_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2} = n \times \frac{u_1 + u_1 + (n-1)r}{2} = n \times \frac{2 + 2n - 2}{2} = n^2$$

## V/ Suites géométriques

### a) Définition

**Définition**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $q$ un réel.
On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $q$ si pour tout entier naturel $n$ :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Remarque : Si $q \neq 0$ et $u_0 \neq 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$.

*Exemple :*
*La suite des puissances de 2 est la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.*
*Les suites $u$ et $v$ définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -4 \times 3^n$ et $v_n = n^2 + 1$ sont-elles géométriques ?*

Pour tout $n$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{-4 \times 3^{n+1}}{-4 \times 3^n} = 3$.
La suite $u$ est donc géométrique de raison 3.
$v_0 = 1$, $v_1 = 2$, $v_2 = 5$ ainsi $v_1 = 2 \times v_0$ et $v_2 = 2,5 \times v_1$
La suite $v$ n'est donc pas géométrique.

### b) Expression de $u_n$ en fonction de $n$

**Propriété**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q$.
Pour tous entiers naturels $n$ et $p$ :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

En particulier, pour tout entier naturel $n$ :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

*Démonstration*

On suppose $n > p$. On a :

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = q\,; \qquad \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} = q\,; \qquad \ldots \qquad \frac{u_{p+2}}{u_{p+1}} = q\,; \qquad \frac{u_{p+1}}{u_p} = q$$

En multipliant toutes ces égalités, on obtient :
$\dfrac{u_n}{u_p} = q^{n-p}$ soit $u_n = u_p \times q^{n-p}$

**Propriété**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 0$.

Si $q > 1$ alors $\begin{cases} \text{si } u_0 > 0, u \text{ est strictement croissante.} \\ \text{si } u_0 < 0, u \text{ est strictement décroissante.} \end{cases}$

Si $q = 1$ alors $u$ est constante.

Si $0 < q < 1$ alors $\begin{cases} \text{si } u_0 > 0, u \text{ est strictement décroissante.} \\ \text{si } u_0 < 0, u \text{ est strictement croissante.} \end{cases}$

Si $q < 0$ alors $u$ n'est pas monotone.

*Démonstration*

Pour tout $n$, $u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n = u_0 \times q^n(q-1)$
Le signe de $u_{n+1} - u_n$ s'obtient donc en fonction du signe de $u_0$, du signe de $q^n$ et du signe de $q - 1$.

### c) Somme de termes consécutifs

**Propriété**

Soit $q$ un réel différent de 1.
Pour tout entier naturel $n$ :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$.
Pour tout entier naturel $n$ :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

*Démonstration*

Posons $S = 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}+q^n$. On a alors $qS = q+q^2+q^3+\cdots+q^n+q^{n+1}$

Ainsi, $S - qS = 1 - q^{n+1}$

D'où : $S = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

*Exemple : Déterminer la somme des n premières puissances de 2* $(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})$*).*

La suite des puissances de 2 est la suite géométrique de raison 2 et telle que $u_0 = 1$

Ainsi, $u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \times \dfrac{1-q^n}{1-q} = 1 \times \dfrac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$

# Exercices

## 1 Définition de suites

Pour toutes les suites $(u_n)$ définies ci-dessous, on demande de calculer $u_1$, $u_2$, $u_3$ et $u_6$.

1. $u_n = \dfrac{7n-2}{n+4}$.
2. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$
3. $u_n$ est le $n^{\text{ième}}$ nombre premier.
4. $u_n$ est la somme des $n$ premiers nombres pairs strictement positifs.
5. $u_n$ est le nombre de diviseurs positifs de $n$.
6. Je place 1 000 **Dh** sur mon livret A au taux de 2,5% par an.
   $u_n$ est la somme dont je dispose la $n^{\text{ième}}$ année.
7. $u_n$ est la $n^{\text{ième}}$ décimale du nombre $\pi$.

## 2 Sens de variation d'une suite

Étudier le sens de variation des suites $(u_n)$ définies ci-dessous :

1. $u_n = 3n - 5$.
2. $u_n = -n^2 + 5n - 2$.
3. $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$.
4. $u_n = \dfrac{3^n}{2}$.
5. $u_n = \sqrt{n^2+3}$.
6. $u_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.
7. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$.
8. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n \end{cases}$.
9. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. *(plus difficile)*

## 3 Majoration, minoration

1. Soit la suite $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, par $u_n = 5 - \dfrac{1}{n}$.
   Montrer que la suite $(u_n)$ est bornée.
2. Soit la suite $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ par $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$.
   (a) Montrer que la suite $(u_n)$ est majorée par 2.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)$ est minorée par $\dfrac{1}{2}$.
3. Soit la suite $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ par $u_n = -n^2 + 8n + 1$.
   Montrer que $(u_n)$ est majorée par 17.
4. Soit la suite $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ par $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
   Montrer que $(u_n)$ est majorée et minorée.

## 4 Suites arithmétiques

Les questions sont indépendantes.

1. On définit pour tout $n$ la suite $(u_n)$ par : $u_n = 3n - 2$.
   Montrer que $(u_n)$ est une suite arithmétique.
2. Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $\dfrac{1}{3}$.
   Calculer le $9^{\text{ième}}$ terme, puis la somme : $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_8$.
3. Soit $(v_n)$ une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 2$ et de raison $-2$.
   Calculer $u_{15}$, puis la somme : $\Sigma = u_7 + u_8 + \ldots + u_{15}$.
4. Calculer : $S = 11 + 14 + 17 + \ldots + 170 + 173$.

## 5 Suites géométriques

Les questions sont indépendantes

1. Soit la suite $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{7^{n+1}}{5}$.
   Montrer que $(u_n)$ est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.
2. Soit $u_n$ une suite géométrique de premier terme $u_1 = \dfrac{1}{81}$ et de raison $-3$.
   Calculer $u_7$, puis $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_7$.
3. Calculer $\Sigma = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 4\,096$.

Les exercices qui suivent sont des extraits d'annales de bac. Il est assez fréquent d'avoir des suites le jour du bac et une grande partie de leur étude a été faite en première, vous êtes donc déjà très forts.

## 6 Suite "arithmético-géométrique"

Exercice très classique que vous avez de fortes chances de retrouver dans l'année.

On considère la suite $(u_n)$ de nombres réels, définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$$

et la relation initiale $u_0 = 2$.

1. Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$.
2. $(v_n)$ est la suite définie pour tout entier naturel $n$ par : $v_n = u_n - 6$.
   Démontrer que $(v_n)$ est une suite géométrique et déterminer sa raison.
3. Pour tout entier naturel $n$, exprimer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$.
4. Calculer $S = v_0 + v_1 + \ldots + v_9$ puis $S' = u_0 + u_1 + \ldots + u_9$.

## 7 Augmentation de loyer

Une personne loue une maison `a partir du premier janvier 1991. Elle a le choix entre deux formules de contrat. Dans les deux cas, le loyer annuel initial est de 4 800 **dh** et le locataire s'engage `a occuper la maison pendant 9 ann´ees compl`etes.

Les valeurs décimales seront arrondies, si nécessaire, au centime près.

1. **Contrat n°1 :** Le locataire accepte une augmentation annuelle de 5% du loyer de l'année précédente.
   (a) Calculer le loyer $u_1$ payé lors de la deuxième année.
   (b) Exprimer $u_n$ (loyer payé lors de la $(n+1)^{\text{ième}}$ année) en fonction de $n$.
   (c) Calculer $u_8$.
   (d) Calculer la somme payée à l'issue des 9 années de contrat.
2. **Contrat n°2 :** Le locataire accepte une augmentation annuelle forfaitaire de 300 **dh** du loyer de l'ann´ee pr´ec´edente.
   (a) Calculer le loyer $v_1$ payé lors de la deuxième année.
   (b) Exprimer $v_n$ (loyer payé lors de la $(n+1)^{\text{ième}}$ année) en fonction de $n$.
   (c) Calculer la somme payée à l'issue des 9 années de contrat. Quel est le contrat le plus avantageux ?

## 8 Suites et représentation graphique

On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies pour tout entier naturel $n$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{4} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{3v_n + 1}{4} \end{cases}$$

1. Calculer $u_1,\ u_2,\ u_3$ d'une part et $v_1,\ v_2,\ v_3$ d'autre part.
2. Dans un repère orthonormal $(\text{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ , d'unité graphique 5 cm, tracer les droites $D$ et $\Delta$ d'équations respectives $y = \dfrac{3x+1}{4}$ et $y = x$.
   Utiliser $D$ et $\Delta$ pour construire sur l'axe des abscisses les points $A_1,\ A_2,\ A_3$ d'abscisses respectives $u_1,\ u_2,\ u_3$ ainsi que les points $B_1,\ B_2,\ B_3$ d'abscisses respectives $v_1,\ v_2,\ v_3$.
3. On considère la suite $(s_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par : $s_n = u_n + v_n$.
   (a) Calculer $s_0$ , $s_1$, $s_2$ et $s_3$. À partir de ces résultats, que peut-on conjecturer pour la suite $(s_n)$ ?
   (b) On admet que la suite $(s_n)$ est une suite constante égale à 2. (la démonstration n'est pas du programme de première)
4. On considère la suite $(d_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par : $d_n = v_n - u_n$.
   (a) Montrer que la suite $(d_n)$ est géométrique.
   (b) Donner l'expression de $d_n$ en fonction de $n$.
5. En utilisant les questions **3.(b)** et **4.(b)**, donner l'expression de $u_n$ et de $v_n$ en fonction de $n$.

# Aide

## 2 Sens de variation d'une suite

Définition :

- Un suite $(u_n)$ est croissante à partir d'un rang $n_0$ ssi :

$$\text{Pour tout } n \geqslant n_0, \quad u_{n+1} \geqslant u_n.$$

- Un suite $(u_n)$ est décroissante à partir d'un rang $n_0$ ssi :

$$\text{Pour tout } n \geqslant n_0, \quad u_{n+1} \leqslant u_n.$$

Pour étudier le sens d'une variation, vous avez le choix entre les trois méthodes ci-dessous, et quelquefois c'est dur d'avoir le choix.... Il faut vous fiez à votre expérience et à votre maîtrise des calculs.

Méthodes :

- La suite $(u_n)$ est croissante à partir du rang $n_0$ ssi

$$\text{Pour tout } n \geqslant n_0 \text{ alors } u_{n+1} - u_n \geqslant 0$$

- **Pour une suite dont tous les termes sont strictement positifs.**
  La suite $(u_n)$ est croissante à partir du rang $n_0$ ssi

$$\text{Pour tout } n \geqslant n_0 \text{ alors } u_{n+1} - u_n \geqslant 0$$

- Soit la suite $u_n$ définie par $u_n = f(n)$.
  Si la fonction $f$ est croissante sur l'intervalle $[n_0; +\infty[$, alors la suite $(u_n)$ est croissante à partir du rang $n_0$.
  *Attention, pour cette dernière propriété, la réciproque est fausse.*

Il y a des propriétés correspondantes pour une suite décroissante.

## 3 Majoration, minoration

Définition :

- Une suite $(u_n)$ est majorée s'il existe un réel $M$ tel que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$$

- Une suite $(u_n)$ est minorée s'il existe un réel $m$ tel que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant m$$

- Une suite est bornée, lorsqu'elle est majorée et minorée.

Méthodes :

Pour montrer qu'une suite est majorée par un réel $M$, on peut :

- Travailler sur des inégalités.
- Montrer que la différence $u_n - M$ est positive pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Soit $u_n = f(n)$, montrer que $f$ est majorée sur $\mathbb{R}^+$.

## 4 Suites arithmétiques

- Une suite $(u_n)$ est dite arithmétique de raison $r$ $(r \in \mathbb{R})$ si :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

Méthode : Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, on prouve que la différence $u_{n+1} - u_n$ est indépendante de $n$.

- Le premier terme est $u_0$ :
Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de raison $r$ et de premier terme $u_0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = u_0 + nr$.
- Le premier terme est $u_1$ :
Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de raison $r$ et de premier terme $u_1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $u_n = u_1 + (n-1)r$.
- Somme des premiers termes :
Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de raison $r$ et de premier terme $u_0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1) \times \dfrac{u_0 + u_n}{2}$.
Certains préfèrent le retenir sous une des formes suivantes :
$$\text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$
ou bien : nombre de termes $\times$ moyenne entre le premier et le dernier terme.

## 5 Suites géométriques

- Une suite $(u_n)$ est dite géométrique de raison $q$ $(q \in \mathbb{R})$ si :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \times u_n$$

Méthode : Pour démontrer qu'une suite est géométrique, on part de $u_{n+1}$ et on cherche à l'écrire en fonction de $u_n$.

- Le premier terme est $u_0$ :
Soit $(u_n)$ une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $u_0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = u_0 \times q^n$.
- Le premier terme est $u_1$ :
Soit $(u_n)$ une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $u_1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.
- Somme des premiers termes :
Soit $(u_n)$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme $u_0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
Certains préfèrent le retenir sous la forme suivante :
$$\text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}.$$

## 6 Suite "arithmético-géométrique"

- Pour la question 2 : On écrit $v_{n+1}$ en fonction de $u_{n+1}$, puis en fonction de $u_n$, puis en fonction de $v_n$.
- Pour la question 4 : Je sais calculer la somme des termes d'une suite géométrique...

## 7 Augmentation de loyer

- Pour augmenter une somme de $t\%$, je la multiplie par $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)$.
- Pour le contrat 1, je reconnais une suite géométrique.
- Pour le contrat 2, je reconnais une suite arithmétique.

# III Correction

## 1 Définition de suites

1. $u_1 = \dfrac{7\times 1-2}{1+4} = 1,\ u_2 = 2,\ u_3 = \dfrac{19}{7}$ et $u_6 = 4$.
2. $u_1 = 2u_0+3 = 7,\ u_2 = 2u_1+3 = 17,\ u_3 = 37$, c'est une suite définie par récurrence, donc pour calculer $u_6$, je dois connaître $u_4$ et $u_5$.
   $u_4 = 2u_3+3 = 77,\ u_5 = 2u_4+3 = 157$ et enfin $u_6 = 2u_5+3 = 317$.
3. $u_1 = 2$ (1 n'est pas un nombre premier), $u_2 = 3,\ u_3 = 5$ et $u_6 = 13$.
4. $u_1 = 2,\ u_2 = 2+4 = 6,\ u_3 = 2+4+6 = 12$ et $u_6 = 2+4+6+8+10+12 = 42$.
5. $u_1 = 1\ u_2 = 2, u_3 = 2$ et $u_6 = 4$.
6. Pour augmenter un nombre de $t\%$, je le multiplie par $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)$.
   $u_1 = 1\,000\times 1,025 = 1\,025,\ u_2 = u_1\times 1,025 = 1\,000\times(1,025)^2 \approx 1\,050{,}63$
   $u_3 = 1\,000\times(1,025)^3 \approx 1\,076{,}89$ et $u_6 = 1\,000\times(1,025)^6 \approx 1\,159{,}69$.
7. $u_1 = 1,\ u_2 = 4,\ u_3 = 1$ et $u_6 = 2$.

## 2 Sens de variation d'une suite

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = 3(n+1)-5 = 3n-2$, donc :
   $u_{n+1}-u_n = (3n-2)-(3n-5) = 3 > 0$ et la suite $(u_n)$ est croissante.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}, u_{n+1}-u_n = -(n+1)^2+5(n+1)-2-(-n^2+5n-2) = -2n+4$.
   Or $-2n+4$ est positif ssi $n\leqslant 2$ et négatif ssi $n\geqslant 2$, donc la suite $(u_n)$ est décroissante à partir du rang 2.
3. Exemple d'utilisation des trois méthodes sur la même suite.
   - Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n = \dfrac{n+2}{n+3}-\dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{(n+2)^2-(n+1)(n+3)}{(n+2)(n+3)} = \dfrac{1}{(n+2)(n+3)}$, or $n+2>0$ et $n+3>0$ donc $u_{n+1}-u_n>0$ et la suite $(u_n)$ est croissante.
   - Tous les termes de la suite sont strictement positifs.
     Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+2}{n+3}\times\dfrac{n+2}{n+1} = \dfrac{n^2+4n+4}{n^2+4n+3}$, or $n^2+4n+4 > n^2+4n+3$, donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ et la suite $(u_n)$ est croissante.
   - On a : $u_n = f(n)$, avec $f : x\mapsto \dfrac{x+1}{x+2}$.
     $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $f'(x) = \dfrac{1(x+2)-1(x+1)}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{(x+2)^2} > 0$, donc $f$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et la suite $(u_n)$ est croissante.
4. Tous les termes de la suite sont strictement positifs.
   Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3^{n+1}}{2}\times\dfrac{2}{3^n} = 3 > 1$, donc la suite $(u_n)$ est croissante.

5. On a : $u_n = f(n)$, avec $f : x \mapsto \sqrt{x^2+3}$

   $f$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ **alors** $(u_n)$ est croissante

6. - Je ne peux pas appliquer la méthode du quotient car tous les termes de la suite ne sont pas strictement positifs.
   - Je ne peux pas appliquer la méthode utilisant une fonction car je ne sais pas étudier les variations de $x \mapsto \left(-\frac{1}{2}\right)^x$.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
     $u_{n+1} - u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \times \left(-\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
     Or l'expression $-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ est positive lorsque $n$ est impair et elle est négative lorsque $n$ est pair, donc la suite $(u_n)$ n'est ni croissante ni décroissante.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 3$ et la suite $(u_n)$ est croissante.
8. Tous les termes de la suite sont strictement positifs. (pour le prouver rigoureusement, il faudrait une méthode de démonstration qui est au programme de terminale, mais nous l'admettons ici)
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} < 1$, donc la suite $(u_n)$ est décroissante.
9. Je pose $u_n = f(n)$, avec $f$ définie sur $[0; +\infty[$, par : $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.
   $f$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}}$.
   Or $x+1 \geqslant x > 0$ donc $\sqrt{x+1} \geqslant \sqrt{x} > 0$ et $f'(x) \leqslant 0$. La fonction $f$ est donc décroissante sur $]0; +\infty[$ et $(u_n)$ est décroissante.

## 3 Majoration, minoration

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $-\frac{1}{n} < 0$ donc $u_n < 5$ et la suite est majorée par 5.
   D'autre part : $n \geqslant 1$ donc $\frac{1}{n} \leqslant 1$ et $u_n = 5 - \frac{1}{n} \geqslant 4$, donc $(u_n)$ est minorée par 4.
   La suite $(u_n)$ est bien bornée.
2. Je traite les deux questions par deux méthodes différentes.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n - 2 = \frac{2n+1}{n+2} - 2 = \frac{2n+1-2(n+2)}{n+2} = \frac{-3}{n+2}$.
   Or $n+3 > 0$, donc $\frac{-3}{n+2} < 0$ et $u_n - 2 < 0$, ce qui donne $u_n < 2$.
   La suite est majorée par 2.
   (b) Soit $f : x \mapsto \frac{2x+1}{x+2}$, $f$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et
   $f'(x) = \frac{2(x+2) - 1(2x+1)}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$.
   La fonction $f$ est donc croissante, de plus $f(0) = \frac{1}{2}$, donc $f$ est minorée par $\frac{1}{2}$ et par conséquent $(u_n)$ aussi.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n - 17 = -n^2 + 8n + 1 - 17 = -n^2 + 8n - 16 = -(n+4)^2 < 0$.
   Donc $u_n < 17$ et la suite $(u_n)$ est majorée par 17.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.
   Or $n \geqslant 0$, donc $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geqslant 1$ et $0 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leqslant 1$. (Car la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$.)
   Finalement $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, donc la suite $(u_n)$ est bornée par 0 et 1.

## 4 Suites arithmétiques

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 2 - 3n + 2 = 3$, donc $(u_n)$ est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = -2$
2. Le $9^{\text{ième}}$ terme est $u_8 = 5 + 8 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{23}{3}$
   $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_8 = 9 \times \dfrac{5 + \frac{23}{3}}{2} = 57$.
3. $u_{15} = u_1 + 14 \times (-2) = -26, \quad u_7 = u_1 + 6 \times (-2) = -10$,
   et $\Sigma = u_7 + u_8 + \ldots + u_{15} = 9 \times \dfrac{-10 - 26}{2} = -162$.
4. $S = 11 + 14 + 17 + \ldots + 170 + 173$ est la somme des termes d'une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 11$ et de raison $r = 3$.
   Soit $n$ l'indice du dernier terme : $u_n = u_0 + nr \Leftrightarrow 173 = 11 + n \times 3 \Leftrightarrow n = 54$, il y a donc 55 termes dans la somme et : $S = 55 \times \dfrac{11 + 173}{2} = 5\ 060$.

## 5 Suites géométriques

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{7^{n+2}}{5} = 7 \times \dfrac{7^{n+1}}{5} = 7u_n$, donc $(u_n)$ est une suite géométrique de premier terme $u_0 = \dfrac{7}{5}$ et de raison 7.
2. $u_7 = u_1 \times (-3)^6 = \dfrac{1}{81} \times (-3)^6 = 9$ et $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_7 = \dfrac{1}{81} \times \dfrac{1 - (-3)^7}{1 - (-3)} = \dfrac{547}{81}$.
3. $\Sigma$ est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 2
   Je cherche l'indice $n$ du dernier terme : $u_n = u_0 q^n \Leftrightarrow 4\ 096 = 1 \times 2^n \Leftrightarrow n = 12$
   donc $\Sigma = 1 \times \dfrac{1 - 2^{13}}{1 - 2} = 8\ 191$.

   Remarque : Nous ne savons pas, pour l'instant, résoudre l'équation $2^n = 4\ 096$. Il faut faire des essais sur la calculatrice.

# 6 Suite "arithmético-géométrique"

1. Calculer $u_1 = 4,\ u_2 = 5$ et $u_3 = \dfrac{11}{2}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 6 \\ &= \frac{1}{2}u_n + 3 - 6 \\ &= \frac{1}{2}(v_n + 6) - 3 \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$.

   Donc la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -4$
3. Pour tout entier naturel $n$, on a $v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = -4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $u_n = -4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 6$.
4. On a : $S = -4 \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = -\dfrac{1\ 023}{128}$

   et $S' = u_0 + u_1 \ldots + u_9 = v_0 + 6 + v_1 + 6 + \ldots v_9 + 6 = -\dfrac{1\ 023}{128} + 6 \times 10 = \dfrac{6\ 657}{128}$.

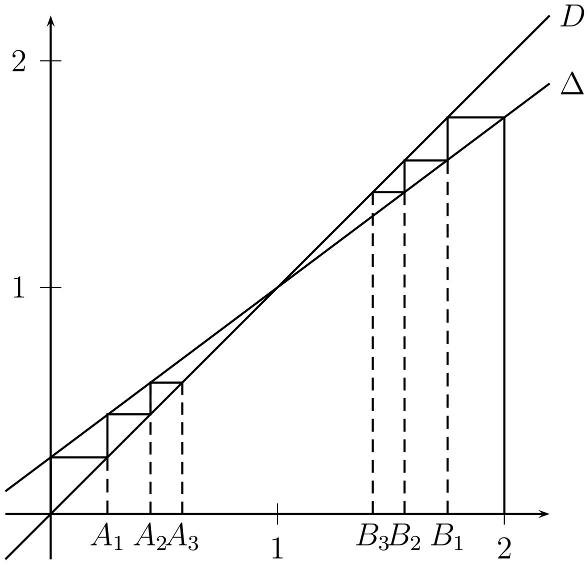
Retour

# 7 Augmentation de loyer

1. **Contrat n°1 :**
   (a) $u_1 = 4\ 800 \times 1,05 = 5\ 040$.
   (b) $u_n = 4\ 800 \times 1,05^n$, c'est suite géométrique.
   (c) $u_8 = 4\ 800 \times 1,05^8 \approx 7\ 091{,}79$.
   (d) $u_0 + u_1 + \ldots + u_8 = 4\ 800 \times \dfrac{1 - 1,05^9}{1 - 1,05} \approx 52\ 927{,}51$
2. **Contrat n°2 :**
   (a) $v_1 = v_0 + 300 = 5\ 100$.
   (b) $v_n = 4\ 800 + 300n$, c'est une suite arithmétique.
   (c) $v_8 = 7\ 200$
   (d) $v_0 + v_1 + \ldots + v_8 = 9 \times \dfrac{4\ 800 + 7\ 200}{2} = 54\ 000$. Le premier contrat est donc plus avantageux pour le locataire.

# 8 Suites et représentation graphique

1. $u_1 = \frac{1}{4}$, $u_2 = \frac{7}{16}$, $u_3 = \frac{37}{64}$ et $v_1 = \frac{7}{4}$, $v_2 = \frac{25}{16}$, $v_3 = \frac{91}{64}$.




3. $s_0 = 2$ , $s_1 = 2$, $s_3 = 2$ et $s_3 = 2$. On peut conjecturer que la suite $(s_n)$ est constante égale à 2.
4. (a) Pout tout $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} = \quad v_{n+1} - u_{n+1}$
$$\frac{3v_n + 1}{4} - \frac{3u_n + 1}{4}$$
$$= \frac{3}{4}(v_n - u_n)$$
$$= \frac{3}{4}d_n$$
Donc $(d_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}, d_n = d_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

5. On a : $\left\{\begin{array}{l} v_n + u_n = s_n \\ v_n - u_n = d_n \end{array}\right.$ ssi $\left\{\begin{array}{l} v_n = \dfrac{s_n + d_n}{2} \\ u_n = \dfrac{s_n - d_n}{2} \end{array}\right.$, donc $\left\{\begin{array}{l} v_n = 1 + \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \\ u_n = 1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \end{array}\right.$.

# Chapitre 7

# trigonométrie

## I) Trigonométrie

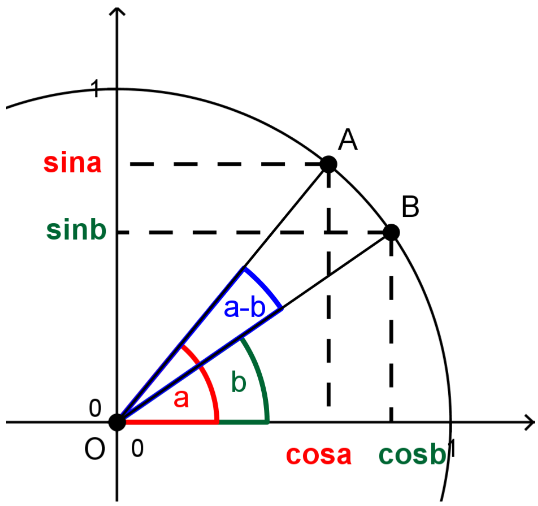
### 1) Formules d'addition

Théorème 1 : Soit $a$ et $b$ deux angles quelconques, on a les relations

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

Démonstration : Soit les point $A$ et $B$ sur le cercle unité :




Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ de deux façons différentes

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(a-b) = \cos(a-b)$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix} = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

On en déduit donc la deuxième formule :

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$

Pour retrouver la première, il faut remplacer dans la formule ci-dessus $b$ par $-b$, on obtient alors :

$$\cos[a-(-b)] = \cos a\cos(-b) + \sin a\sin(-b)$$

comme la fonction cosinus est paire et la fonction sinus impaire, on a :

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

Pour retrouver les formule avec le sinus, on utilise la formule qui permet de passer du cosinus au sinus, c'est à dire :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \cos\left[\frac{\pi}{2}-(a+b)\right]\\ &= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-a\right)-b\right]\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin b\end{aligned}$$

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \sin a$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \cos a$

$$= \sin a\cos b + \cos a\sin b$$

On retrouve la dernière formule en remplaçant $b$ par $-b$ et compte tenu des parités des fonctions cos et sin, on obtient alors :

$$\sin[a+(-b)] = \sin a\cos(-b) + \cos a\sin(-b)$$
$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$$

**Exemple :** En remarquant que :

$$\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$$

calculer la valeur exacte de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

En appliquant les formules d'addition, on a :

$$\begin{aligned}\cos\frac{5\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\frac{5\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

**Remarque** : Pour se souvenir des formules d'addition, on peut remarquer :

- ➪ Avec le cosinus on ne "panache pas" tandis qu'avec le sinus on "panache".
- ➪ Avec le cosinus et $a+b$, on met un "moins" entre les deux termes. Avec le sinus pas de problème de signe

## 2) *Formules de duplication*

*Théorème* : Pour tout angle $a$, on a les relations :

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos^2 a-\sin^2 a\\ &= 2\cos^2 a-1\\ &= 1-2\sin^2 a\end{aligned}$$

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a$$

**Démonstration** : La formule sur le $\sin 2a$ est l'application directe des formules d'addition. Les formules sur le $\cos 2a$ font intervenir la relation entre $\cos^2$ et $\sin^2$. En effet :

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos(a+a)\\ &= \cos^2 a-\sin^2 a\end{aligned}$$

En appliquant la formule $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, on obtient les deux formules suivantes

$$\begin{aligned} &= \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1 \\ &= (1 - \sin^2 a) - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a \end{aligned}$$

**Exemples :**

1) Calculer $\cos 2x$ dans les deux cas suivants

   a) $\cos x = \dfrac{3}{5}$

   b) $\sin x = -\dfrac{1}{3}$

   a) On ne connaît que le cosinus donc :

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1 \\ &= 2 \times \frac{9}{25} - 1 \\ &= \frac{18 - 25}{25} \\ &= -\frac{7}{25} \end{aligned}$$

   b) On ne connaît que le sinus donc :

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 1 - 2\sin^2 x \\ &= 1 - 2\left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= 1 - 2 \times \frac{1}{9} \\ &= \frac{9 - 2}{9} \\ &= \frac{7}{9} \end{aligned}$$

2) $a$ est un réel de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que :

$$\cos a = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

   a) Calculer $\cos 2a$.

   b) À quel intervalle appartient $2a$. Déduire alors $a$.

a) On ne connaît que le cosinus donc :

$$\begin{aligned}\cos 2a &= 2\cos^2 a - 1\\ &= 2\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2\\ &= 2\times\frac{2+\sqrt{3}}{4} - 1\\ &= \frac{4+2\sqrt{3}-4}{4}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

b) Comme $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors $2a \in [0; \pi]$, on en déduit donc :

$$2a = \frac{\pi}{6} \quad \text{et donc} \quad a = \frac{\pi}{12}$$

### 3) Formules de linéarisation

***Théorème*** : Pour tout angle $a$ on a les relations :

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$$
$$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

**Démonstration** : Ces formules se déduisent directement des formules de duplication avec le $\cos 2a$. En effet :

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \ \Rightarrow\ 2\cos^2 a = 1+\cos 2a \ \Rightarrow\ \cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$$

$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a \ \Rightarrow\ 2\sin^2 a = 1-\cos 2a \ \Rightarrow\ \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

**Exemple** : Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.
On a :

$$\begin{aligned}\cos^2\frac{\pi}{8} &= \frac{1+\cos 2\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2}\\ &= \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}\\ &= \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\\ &= \frac{2+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Comme $\cos\frac{\pi}{8} > 0$, on a

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{\pi}{8} &= \frac{1-\cos 2\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2}\\ &= \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}\\ &= \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\\ &= \frac{2-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Comme $\sin\frac{\pi}{8} > 0$, on a

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

# Formulaire de trigonométrie

## 1- Les angles associés :

Pour tout $x$ réel, on a :

$\cos(-x)=\cos(x)$ ; $\cos(\pi+x)=-\cos(x)$ ; $\cos(\pi-x)=-\cos(x)$ ; $\cos(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin(x)$ ; $\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin(x)$

$\sin(-x)=-\sin(x)$ ; $\sin(\pi+x)=-\sin(x)$ ; $\sin(\pi-x)=\sin(x)$ ; $\sin(\frac{\pi}{2}+x)=\cos(x)$ ; $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos(x)$

Pour tout $x$ appartenant à $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, on a : $\tan(-x)=-\tan(x)$ ; $\tan(\pi+x)=\tan(x)$ ; $\tan(\pi-x)=-\tan(x)$

## 2- Les équations trigonométriques :

$\alpha$ est un réel quelconque : $\cos(x)=\cos(\alpha)\Leftrightarrow$ il existe un entier $k$ tel que : $x=\alpha+2k\pi$ , *ou* $x=-\alpha+2k\pi$

$\sin(x)=\sin(\alpha)\Leftrightarrow$ il existe un entier $k$ tel que : $x=\alpha+2k\pi$ , *ou* $x=\pi-\alpha+2k\pi$

$\alpha\in D_{\tan}$ : $\tan(x)=\tan(\alpha)\Leftrightarrow$ il existe un entier $k$ tel que : $x=\alpha+k\pi$

## 3- Formules d'addition :

Pour tous réels $a$ et $b$ : $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ ; $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$

$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$ ; $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$

Remarquons que, pour $b=-a$ la 1ère formule donne : $\cos^2(a)+\sin^2(a)=1$.

Pour tous réels $a$ et $b$ « autorisés » : $\tan(a+b)=\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$ ; $\tan(a-b)=\dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$

Pour tout réel $a$ : $\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=2\cos^2(a)-1=1-2\sin^2(a)$ ; $\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$

$\cos(3a)=4\cos^3(a)-3\cos(a)$ ; $\sin(3a)=3\sin(a)-4\sin^3(a)$

Pour tout réel $a$ « autorisé » : $\cos(2a)=\dfrac{1-\tan^2(a)}{1+\tan^2(a)}$ ; $\sin(2a)=\dfrac{2\tan(a)}{1+\tan^2(a)}$ ; $\tan(2a)=\dfrac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$

## 4- Formules de transformation :

Pour tous réels $a$ et $b$ : $\cos(a)\cos(b)=\frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$ ; $\sin(a)\sin(b)=-\frac{1}{2}(\cos(a+b)-\cos(a-b))$

$\sin(a)\cos(b)=\frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$

Pour tous réels $p$ et $q$ : $\cos(p)+\cos(q)=2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$ ; $\cos(p)-\cos(q)=-2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$

$\sin(p)+\sin(q)=2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$ ; $\sin(p)-\sin(q)=2\cos(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$

Pour tous réels $p$ et $q$ autorisés : $\tan(p)+\tan(q)=\dfrac{\sin(p+q)}{\cos(p)\cos(q)}$ ; $\tan(p)-\tan(q)=\dfrac{\sin(p-q)}{\cos(p)\cos(q)}$

Pour tous réels $a$ et $b$ non tous deux nuls, et pour tout réel $x$ : $a\cos(x)+b\sin(x)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$,

où $\varphi$ est un réel tel que : $\cos(\varphi)=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(\varphi)=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ .

# *Exercices*

## Exercice 1

1) Vérifier que : $\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4}$ puis calculer $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$

2) Vérifier que : $\dfrac{11\pi}{12} = \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}$ puis calculer $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{11\pi}{12}$

## *Exercice 2*

Calculer $\cos 2x$ dans chacun des cas suivants :

a) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\cos x = \dfrac{3}{5}$ c) $\sin x = -\dfrac{1}{3}$

## *Exercice 3*

1) Réduire les expressions suivantes :
   a) $A(x) = \cos 7x \sin 6x - \sin 7x \cos 6x$
   b) $B(x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$
   c) $C(x) = \cos 3x \sin 2x + \cos 2x \sin 3x$
2) Exprimer chacune des expressions suivantes en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.

   a) $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ b) $\sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ c) $\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$
3) $x$ est un réel de l'intervalle $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$.
   a) Réduire l'écriture de l'expression :

$$\sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x$$

   b) En déduire que :

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$$

## *Exercice 4 :*

$a$ et $b$ sont deux réels de l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que :

$$\cos a = \frac{3}{5} \quad \text{et} \quad \sin b = \frac{1}{2}$$

1) Calculer $\sin a$ et $\cos b$.
2) En déduire $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.

## Exercice 5:

**Formules d'addition et de duplication**

$a$ et $b$ sont deux réels de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que :

$$\sin a = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \cos b = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

1) Calculer $\cos a$ et vérifier que $\sin b = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.
2) a) Calculer $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.
   b) En déduire $(a+b)$ puis $b$.

## Exercice 5 :

**Formules d'addition et de duplication**

$a$ est un réel de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que : $\cos a = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

1) Calculer $\cos 2a$
2) a) A quel intervalle appartient $2a$
   b) En déduire $a$, en justifiant votre réponse.

## Exercice 6 :

**Formules d'addition et de duplication**

$a$ est un réel de l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{4}\right[$

1) a) Démontrer que : $(\cos a + \sin a)^2 = 1 + \sin 2a$
   b) En déduire que : $\dfrac{1+\sin 2a}{\cos 2a} = \dfrac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a}$
2) Sans calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\cos\frac{\pi}{12}$, déduire de la question précédente que :

$$\frac{\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}} = 1 + \sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}} = \sqrt{3}$$

## Exercice 8

demontrer que :

$$\cos 3x + \sin 3x = (\cos x - \sin x)(4\cos x \sin x + 1)$$

$$\cos^2 \frac{5}{2}x - \cos^2 \frac{3}{2}x = (-\sin 4x)\sin x$$

$$\sin(x+y)\cdot\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$$

$$\sin(x+y)\cdot\sin(x-y) = \cos^2 y - \cos^2 x$$

$$\tan x - \tan y = \frac{2\sin(x-y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}$$

$$\tan^2 x - \tan^2 y = \frac{\sin(x+y)\cdot\sin(x-y)}{\cos^2 x \cos^2 y}$$

## Exercice 9

*1) a) verifier que* $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

*b ) Determiner* $\alpha$ *tel que* $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x-\alpha)$

*2 ) On considere l'equation* $(E)$: $\tan x = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

*Montrer que* $(E) \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

*3 ) a) Resoudre dans* $[0;2\pi]$ *l'equation* $(E)$

## Exercice 10

*1 ) Resoudre dans* $\mathbb{R}$ *les équations*

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$$\sin 2x = \tan x \quad ; \quad \tan x\cdot\tan 4x = -1$$

$$\cos x + \sin x = 1$$

$$\cos 2x + \cos x - 2 = 0$$

$$\cos 2x + \sin 2x = 1$$

*2 ) resoudre les inequations suivantes :*

$$x\in[0;\pi] \quad \sqrt{3}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) \succ -1$$

$$x\in\left]-\pi;\pi\right] \quad \cos x + \sin x + \tan x \geq \frac{1}{\cos x}$$

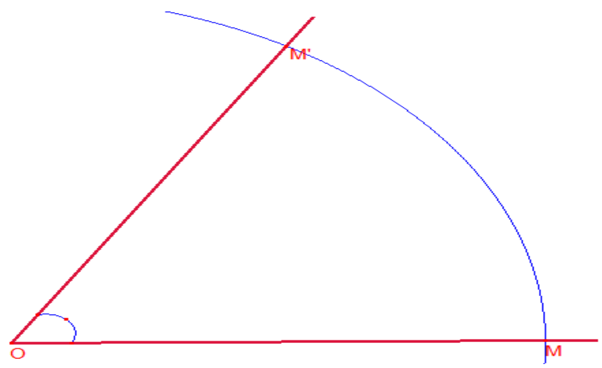
# Chapitre 8
# La rotation dans le plan

## I. Rotation

### 1- Rotation

**Dé inition 1.** Soit O un point du plan. La rotation r de centre O et d'angle $\alpha$ transforme un point M en un point image $M'$ tel que :

$$\begin{cases} OM' = OM \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha[2\pi] \end{cases}$$




On note parfois $r_{(O;\alpha)}$ la rotation de centre O et d'angle $\alpha$ ou $r_o$ et on précise l'angle de rotation. D'après le figure ci-dessus $r_{(O;\alpha)}(M) = M'$

**Remarques 1.**
1) L'image du centre O est O (on dit que le point O est invariant),
2) Les rotations d'angle $\alpha = \frac{\pi}{2}$ sont appelées quarts de tour direct,
3) Les rotations d'angle $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ sont appelées quarts de tour indirect,
4) La rotation de centre O et d'angle $\alpha = \pi$ est la symétrie centrale par rapport à O.

**Exemple 1.** ABCD est un carré de sens direct de centre O. Soit $r_A$ la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $r_O$ une rotation de centre O et d'angle $\alpha$.

1) Déterminer $r_A(A)$ ; $r_A(B)$ ; $r_A(D)$,
2) Comment choisir $\alpha$ pour avoir $r_O(A) = B$ ? Comment choisir $\alpha$ pour avoir $r_O(A) = C$ ?

## 2- Formule Analytique d'une Rotation

Soit $\Omega$ un point du plan $\mathcal{P}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors la rotation d'angle $\theta$ et de centre $\Omega$ :

$$\begin{aligned} R : \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{P} \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

tels que :

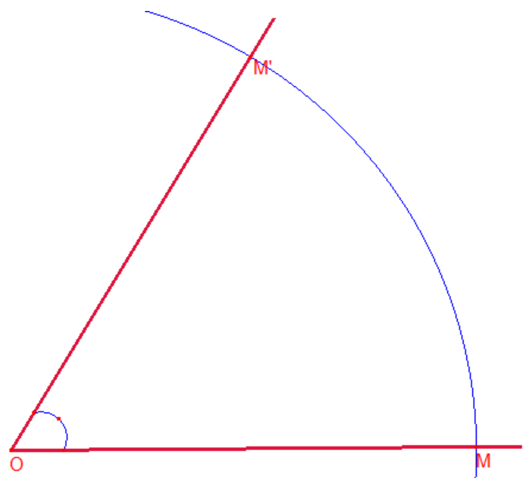
$$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta[2\pi]. \end{cases}$$

On a :

$$R(M) = M' \Longleftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta[2\pi]. \end{cases}$$

## 3 - Rotation réciproque

**Définition 1** Soit r une rotation de centre O et d'angle $\alpha$. La rotation de centre O et d'angle $-\alpha$ est appelée rotation réciproque de r. On la note $r^{-1}$.




D'après le figure ci-dessus on a : $r_O^{-1}(M') = M$.

# II - Caractérisations et Propriétés de Rotation

## 1- Les caracteristiques de Rotation

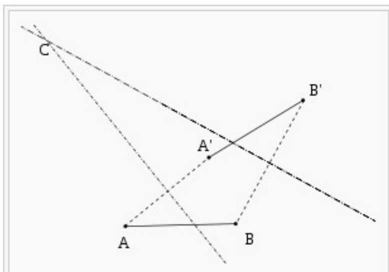
Une rotation peut donc être caractérisée par l'image de deux points : Soient A et B deux points distincts et $A'$, $B'$ deux points tels que $AB = A'B'$

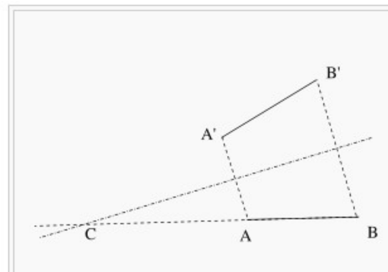
avec $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$, il existe une unique rotation $r$ qui transforme $A$ en $A'$ et $B$ en $B'$.

Cette rotation pour angle $\theta = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'})$, et pour centre l'intersection des médiatrices de [AA'] et $[BB']$ (si elles se coupent) ou bien le point d'intersection de (AB) et de la médiatrice de $[AA']$ (si les médiatrices ne sont pas sécantes).

Il n'est pas nécessaire de connaître le centre de la rotation pour construire l'image M' du point M (distinct de A) car celui-ci vérifie les deux conditions suivantes :

$$AM = A'M' \; et \; (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{A'M'}) = \theta$$




## 2 -Propriétés de Rotation

**Propriété 1.** La rotation conserve :

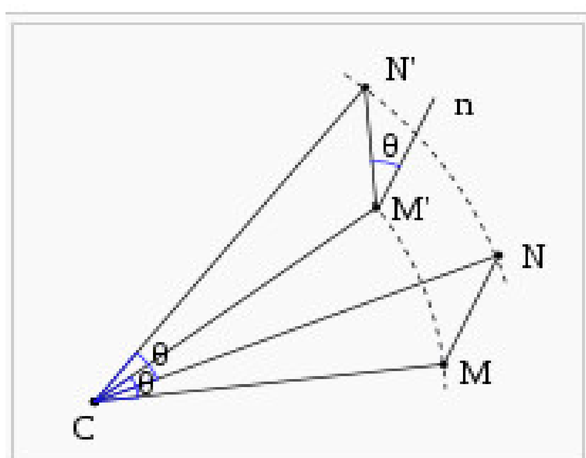
- les longueurs ;
- les angles (l'image d'un angle est un angle de même amplitude) ;
- les parallèles (les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles) ;
- les aires (l'image d'une figure est une figure de même aire).

**Propriété 2.** soient M et N deux points du plan distincts. On note $M'$ et $N'$ leurs images respectives par la rotation de centre $c$ et d'angle $\theta$. Alors :on

$$MN = M'N'$$

$$(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{M'N'}) = \theta \;\; [2\Pi]$$

*Démonstration.*



Les triangles CMN et CM'N' sont isométriques de même orientation car

$$CM = CM'$$

$$CN = CN'$$

$$(\overrightarrow{CM};\overrightarrow{CN}) = (\overrightarrow{CM};\overrightarrow{CM'}) + (\overrightarrow{CM'};\overrightarrow{CN'}) + (\overrightarrow{CN'};\overrightarrow{CN}) = \theta + (\overrightarrow{CM'};\overrightarrow{CN'}) - \theta = (\overrightarrow{CM'};\overrightarrow{CN'})$$

Donc, en particulier :

$$MN = M'N'$$

$$(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{M'N'};\overrightarrow{M'C})$$

Une relation de Chasles sur les angles permet alors d'écrire :

$$(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M'N'}) = (\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MC};\overrightarrow{M'C}) + (\overrightarrow{M'C};\overrightarrow{M'N'})$$

les deux angles extrêmes s'annulent et celui du milieu vaut $\theta$ donc

$$(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M'N'}) = \theta$$

**Propriété 3.** une rotation transforme trois points alignés dans un ordre en trois points alignés dans le même ordre.

*Démonstration.* soient A,B et C trois points du plan alignés dans cet ordre et A' B' C' leurs image par la rotation de centre o et d'angle $\theta$ alors :

$$AB = A'B' \ \ et \ \ BC = B'C' \ \ et \ \ AC = A'C'$$

$$AB + BC = AC$$

c'est a dire :

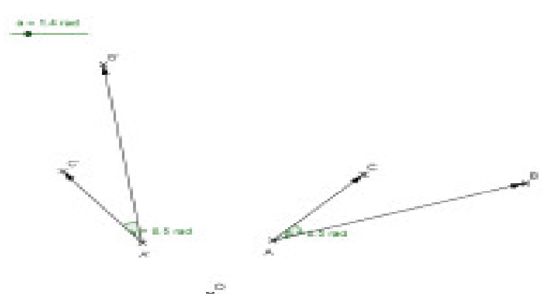
$$A'B' + B'C' = A'C'$$

les trois point $A'$ et $B'$ et $C'$ sont aligné dans cet ordre .

**Propriété 4.** soient $A$, $B$ et $C$ trois points du plan distincts. On note $A'$, $B'$ et $C'$ leurs images respectives par la rotation de centre O et d'angle $\alpha$.

Alors :

$$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'})$$



*Démonstration.* on a :

$$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}) + (\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'}) + (\overrightarrow{A'C'};\overrightarrow{AC})$$

Or : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}) = \alpha$ et $(\overrightarrow{A'C'};\overrightarrow{AC}) = -\alpha$

On obtient :

$$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'})$$

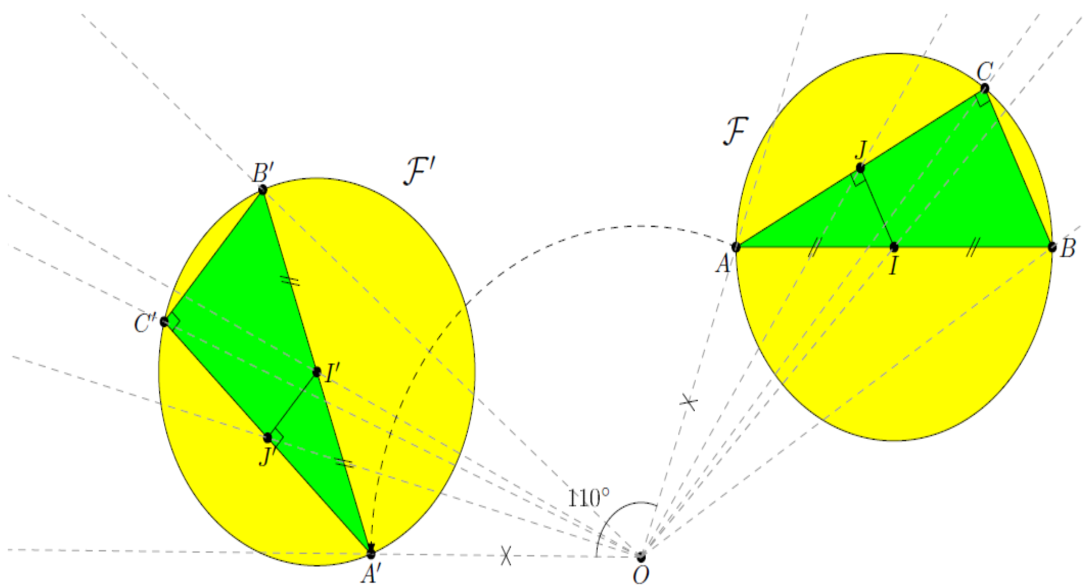
## 3 - Image d'une droite, d'un segment et d'un cerle par une rotation :

**Propriété 1.** Soit r une rotation. Soit A et B deux points tles que $A \neq B$. Alors on a :

(i) l'image de la droite (AB) par la rotation r est la droite $(A^{'}B^{'})$ telle que $r(A) = A^{'}$ et $r(B) = B^{'}$.

(ii) L'image du segment $[AB]$ est le segment $[A^{'}B^{'}]$ telle que $r(A) = A^{'}$ et $r(B) = B^{'}$.

(iii) l'image du cercle $\mathcal{C}(O,R)$ par la rotation r est le cercle $\mathcal{C}(O^{'},R)$ telle que $r(O) = O^{'}$ (Voir figure ci-dessous).



# Chapitre 9

# Limite d'une fonction numerique

## 1 Limite à l'infini

### 1.1 Limite infinie en $+\infty$, en $-\infty$

**Définition :** Soit $f$ une fonction définie sur l'intervalle $[\alpha\,;+\infty[$.
On dit que $f$ a comme limite $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ si, pour tout nombre $A$, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ suffisamment grand (voir figure 1).
On note alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{+\infty} f = +\infty$$

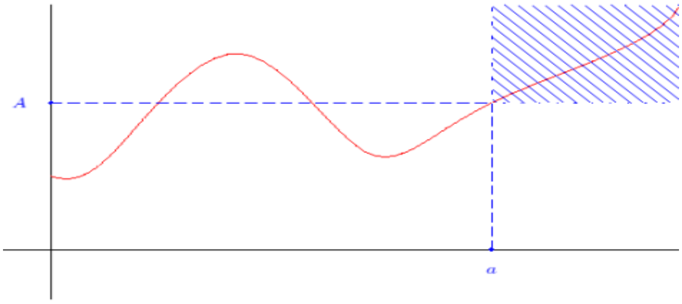



FIGURE 1 – Limite $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$

**Remarque :** On peut définir de manière analogue $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

**Cas des fonctions usuelles :**

- Les fonctions $x \longrightarrow x^2$ , $x \longrightarrow \sqrt{x}$ , $x \longrightarrow x^n$ ($n$ entier strictement positif) ont comme limite $+\infty$ en $+\infty$.
- Les fonctions $x \longrightarrow x^2$ , $x \longrightarrow x^n$ ($n$ entier pair, non nul) ont comme limite $+\infty$ en $-\infty$.
- Les fonctions $x \longrightarrow x^n$ ($n$ entier impair) ont comme limite $-\infty$ en $-\infty$.

### 1.2 Limite finie en $+\infty$, en $-\infty$ – Asymptote horizontale

**Définition :** Soit $f$ une fonction définie sur l'intervalle $[\alpha\,;+\infty[$ et $l$ un nombre réel.
On dit que $f$ a comme limite $l$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant $l$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ suffisamment grand (voir figure 2).
On note alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \qquad \text{ou} \qquad \lim_{+\infty} f = l$$

**Remarques :** On peut définir de manière analogue $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ .

**Définition :** Lorsque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ (respectivement $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$), on dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote (horizontale) à la courbe représentant $f$.

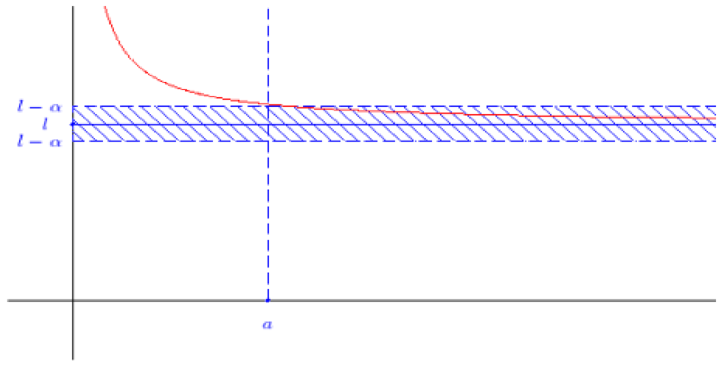



FIGURE 2 – Limite finie lorsque $x$ tend vers $+\infty$

**Remarque :** Graphiquement, ceci signifie que la courbe représentant $f$ se rapproche de plus en plus de cette droite lorsque $x$ devient grand (voir figure 2).

**Cas des fonctions usuelles :**

— Les fonctions $x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$ , $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ , $x \longrightarrow \frac{1}{x^n}$ ($n$ entier strictement positif) ont comme limite $0^+$ en $+\infty$.

— Les fonctions $x \longrightarrow \frac{1}{x^n}$ ($n$ entier pair, non nul) ont comme limite $0^+$ en $-\infty$.

— Les fonctions$x \longrightarrow \frac{1}{x^n}$ ($n$ entier impair, non nul) ont comme limite $0^-$ en $-\infty$.

**Remarques :**

1. « $0^+$ » signifie que la fonction tend vers zéro tout en restant plus grande que zéro.
2. Toutes les courbes représentatives de ces fonctions admettent l'axe des abscisses comme asymptote.

## 2 Limite infinie en un réel $a$

**Définition :** Soit $a$ un réel et $f$ une fonction définie au voisinage de $a$ (mais pas nécessairement en $a$).
On dit que $f$ a comme limite $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $a$ si, pour tout nombre $A$, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ suffisamment proche de $a$ (voir figure 3).
On note alors :

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{a} f = +\infty$$

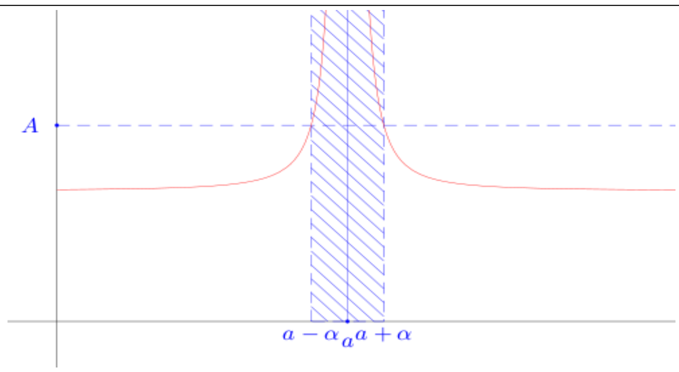



FIGURE 3 – Limite infinie lorsque $x$ tend vers le réel $a$

**Remarque :** On peut définir de manière analogue $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ ; $\lim_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = \pm\infty$.

**Définition :** Lorsque $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ (respectivement $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$), on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote (verticale) à la courbe représentant $f$(voir figure 3).

**Cas des fonctions usuelles :**

- Pour $x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$ : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$
- Pour $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$
- Pour $x \longrightarrow \frac{1}{x^2}$ : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$
- Plus généralement :
  - si $n$ entier pair non nul , $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ ;
  - si $n$ entier impair, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$

**Remarque :** Toutes les courbes représentatives de ces fonctions admettent l'axe des ordonnées comme asymptote.

# 3 Opérations sur les limites

Dans toute cette section, $l$ et $l'$ désignent deux nombres réels ; $a$ désigne soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

## 3.1 Somme de deux fonctions

Les résultats sont résumés dans le tableau 1.

| $\lim_{x\to a} f(x)$ | $l$ | $l$ | $l$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim_{x\to a} g(x)$ | $l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim_{x\to a} [f(x)+g(x)]$ | $l+l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | F.I. |

TABLE 1 – Limite d'une somme

**Remarque :** « F.I. » signifie « Forme Indéterminée ». Ceci veut dire que l'on ne peut pas conclure directement à l'aide du tableau. Il faut étudier plus en détail la fonction pour « lever l'indétermination » et trouver la limite.

## 3.2 Produit de deux fonctions

### 3.2.1 Limite d'un produit

Les résultats sont résumés dans le tableau 2.

| $\lim_{x\to a} f(x)$ | $l$ | $l>0$ | $l>0$ | $l<0$ | $l<0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim_{x\to a} g(x)$ | $l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim_{x\to a} [f(x)\times g(x)]$ | $l\times l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | F.I. | F.I. |
| | | Il s'agit de la règle des signes | | | | | | | | |

TABLE 2 – Limite d'un produit

#### 3.2.2 Application : limite en l'infini d'une fonction polynôme

**Exemple :** $f(x) = -3x^4 + x^3 - 2x + 1$

On a une forme indéterminée en $-\infty$ et en $+\infty$.

Si $x \neq 0$ :

$$f(x) = x^4\left(-3 + \frac{x^3}{x^4} - \frac{2x}{x^4} + \frac{1}{x^4}\right) = x^4\left(-3 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty}\left(-3+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right) = -3\end{array}\right\} \text{donc } \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

**Remarques :**

1. On a un résultat analogue lorsque $x$ tend vers $+\infty$.
2. On peut remarquer que la limite est la même que celle de $-3x^4$. Ce résultat se généralise.

**Propriété :**
En $+\infty$ ou en $-\infty$, une fonction polynôme a la même limite que son monôme de plus haut degré.

**Remarque :** Ce résultat n'est valable *que* pour les fonctions polynômes et *uniquement* pour l'étude des limites en l'infini.

### 3.3 Inverse d'une fonction

Les résultats sont résumés dans le tableau 3.

| $\lim_{x\to a} f(x)$ | $l$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ et $f(x)>0$ | $0$ et $f(x)<0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)}$ | $\frac{1}{l}$ | $0$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |

TABLE 3 – Limite de l'inverse

**Remarque :** Lorsque $f(x)$ tend vers zéro, il est *nécessaire* de connaître le signe de $f$ pour conclure. Par contre, dans la plupart des cas, ce n'est *pas du tout* une forme indéterminée.

**Exemples :**

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2-1} =?$
   $\lim_{x\to+\infty} x^2-1 = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2-1} = 0$.
   On a une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.
2. $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2-1} =?$
   Comme $\lim_{x\to 1} x^2-1 = 0$, il est nécessaire de connaître le signe de $\left(x^2-1\right)$ pour conclure. Il s'agit d'un trinôme du second degré, avec deux racines évidentes : $-1$ et $1$. De plus, le coefficient du terme de degré 2 est positif. Le signe est donc le suivant :

   | $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
   |---|---|---|---|---|---|---|---|
   | $x^2-1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

   On a donc :
   $$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{x^2-1} = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1}{x^2-1} = +\infty$$
   On a une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

**Remarques :**

1. Attention ! La notation $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<-1}} \frac{1}{x^2-1}$ n'a aucun sens. Il suffit de connaître le signe de $\left(x^2-1\right)$ au *voisinage* de 1 pour conclure.
2. Par un raisonnement analogue, on trouve :
   $$\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{1}{x^2-1} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{1}{x^2-1} = -\infty$$

## 3.4 Quotient de deux fonctions

### 3.4.1 Limite d'un quotient

On peut remarquer que $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \frac{1}{g(x)}$. On peut donc trouver la limite d'un quotient à l'aide des tableaux 2 et 3.
Les résultats sont résumés dans le tableau 4.

| $\lim_{x\to a} f(x)$ | $l$ | $l$ | $l \neq 0$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim_{x\to a} g(x)$ | $l' \neq 0$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $0$ | $0$ | $l' \neq 0$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $0$ |
| $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ | $\frac{l}{l'}$ | $0$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | F.I. | F.I. |
| | | | Il faut étudier le signe de $g$ | | règle des signes | | |

TABLE 4 – Limite d'un quotient

**Exemples :**

1. $\lim_{x\to\frac{1}{3}} \frac{x-2}{3x-1} = ?$

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{x\to\frac{1}{3}} x-2=-\frac{5}{3}\\ \lim_{x\to\frac{1}{3}} 3x-1=0\end{array}\right\}\text{ il faut étudier le signe de } 3x-1$$

le signe est résumé dans le tableau suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $3x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

. Par suite, comme la limite du numérateur est négative, on a :

$$\lim_{\substack{x\to\frac{1}{3}\\ x<\frac{1}{3}}} \frac{x-2}{3x-1}=+\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to\frac{1}{3}\\ x>\frac{1}{3}}} \frac{x-2}{3x-1}=-\infty$$

On a une asymptote verticale d'équation $x=\frac{1}{3}$.

2. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-3}{\sqrt{x}} = ?$

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{x\to 0} x^2-3=-3\\ \lim_{x\to 0} \sqrt{x}=0 \text{ et } \sqrt{x}>0\end{array}\right\}\text{ donc } \lim_{x\to 0}\frac{x^2-3}{\sqrt{x}}=-\infty$$

On a une asymptote verticale d'équation $x=0$.

3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3}{\sqrt{x}} = ?$

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{x\to+\infty} x^2-3=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty\end{array}\right\}\text{ On a une forme indéterminée}$$

De plus :

$$\frac{x^2-3}{\sqrt{x}}=\frac{x^2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt{x}}=\frac{x\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt{x}}=x\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x}=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{x}}=0\end{array}\right\}\text{ donc } \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3}{\sqrt{x}}=+\infty$$

### 3.4.2 Application : limite en l'infini d'une fonction rationnelle

**Exemple :**

$h(x)=\frac{3x^2-5x+1}{x+2}$

On a une forme indéterminée lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

Si $x\neq 0$ :

$$h(x)=\frac{x^2\left(3-\frac{5x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\frac{x\left(3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{1+\frac{2}{x}}$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{x\to+\infty} x=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty} 3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=3\end{array}\right\}\text{ donc } \lim_{x\to+\infty} x\left(3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$$

De plus, $\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{2}{x}=1$ donc $\lim_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$

**Remarque :** On peut remarquer que la limite est la même que celle du quotient des monômes de plus haut degré. Ce résultat se généralise.

**Propriété :**

En $+\infty$ ou en $-\infty$, une fonction rationnelle a la même limite que le quotient des monômes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.

# EXERCICES CORRIGES

Exercice n 1.

Déterminer la limite éventuelle en $+\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\frac{1}{x^3}$ 2) $f(x)=-x^4$ 3) $f(x)=-3+\frac{1}{x}$

Déterminer la limite éventuelle en $-\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

4) $f(x)=-x^3$ 5) $f(x)=5+\frac{1}{x}$ 6) $f(x)=\sqrt{-x}$

Détermine les limites suivantes

7) $\lim_{x\to+\infty}(2x+1-\frac{1}{x})$ 8) $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}(x^2-4+\frac{1}{x})$ 9) $\lim_{x\to-\infty}(-x^2+x-3)$ 10) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x-4}$ 11) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{-2+\frac{3}{x}}$

12) $\lim_{x\to+\infty}x(-x+1)$ 13) $\lim_{t\to-\infty}\left(-3t(t-4)\right)$ 14) $\lim_{x\to-\infty}x\left(\frac{1}{x}+3\right)$

Etudier le comportement de $f$ lorsque $x$ tend vers $a$ avec :

15) $f(x)=\frac{1}{x-2}$, $a=2$ 16) $f(x)=\frac{-2}{x+3}$, $a=-3$ 17) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $a=0$

Exercice n 2.

Déterminer les limites de $f(x)=\frac{x}{(x+1)(x-2)}$ en $x=2$ et $x=-1$ .

Exercice n 3.

Détermine les limites suivantes

1) $f(x)=\sqrt{\frac{2x^2-1}{x}}$ en $+\infty$ 2) $g(x)=\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ en $-\infty$

Exercice n 4.

Vrai ou Faux ?

1) Si une fonction $f$ est strictement croissante et positive sur $[0;+\infty[$, alors $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2) Si une fonction $f$ a pour limite 0 en $+\infty$, alors, à condition de prendre $x$ suffisamment grand, tous les nombres réels $f(x)$ sont de même signe

3) Si une fonction $f$ a pour limite -1 en $+\infty$, alors, à condition de prendre $x$ suffisamment grand, tous les nombres réels $f(x)$ sont de même signe

Exercice n 5.

$f$ est une fonction numérique dont l'expression est $f(x)=ax+\frac{2}{x-b}$.

Déterminer $a$ et $b$ sachant que $\lim_{x\to3^+}f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to5}f(x)=11$

Exercice n 6. Détermine les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to+\infty}3x^2-2x+10$ 2) $\lim_{x\to-\infty}-4x^3+5x-2$ 3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+4}{x^2+x+1}$

4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-8x^3+1}{4x+16}$ 5) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x-2}$ 6) $\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1}$ 7) $\lim_{x\to9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

Exercice n 7.

Trouver deux fonctions $f$ et g telles que $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ et telles que :

1) $\lim_{x\to+\infty}f(x)-g(x)=1$ 2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=7$

Exercice n 8.

Détermine les limites suivantes : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+3}-\sqrt{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4x+3}-(x+2)$

Exercice n 9.

1) Soit $f$ une fonction telle que pour tout $x$ 1, $\frac{2}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{2}{x}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) Soit $f$ une fonction telle que pour tout $x$ 1, $\frac{2}{x} \leq f(x)-\frac{3}{2} \leq \frac{3}{x}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Les propriétés suivantes permettent-elles de conclure concernant $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ?

3) $f(x) \geq 2x-3$ 4) $f(x) \geq x^2-3$

Exercice n 10.

On considère la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x-\sqrt{x}+4$

1) Montrer que pour tout $x \in [0;+\infty[$ $f(x) \geq 3\sqrt{x}$
2) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Exercice n 11.

Soit la fonction $f$ définie sur $D=[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$

1) Démontrer que, pour tout $x$ de $D$, on a : $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$.

2) Démontrer que, pour tout $x \in ]0;+\infty[$ : $0 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

3) En déduire la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.

Exercice n 12.

On considère la fonction numérique $f$ définie par $f(x)=2x-\sin x$

1) Montrer que pour tout $x$ réel $2x-1 \leq f(x) \leq 2x+1$

2) En déduire les limites de $f$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ et lorsque $x$ tend vers $-\infty$

Exercice n 13.

Déterminer, à l'aide des théorèmes de comparaison, les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de chacune des fonctions $f$ suivantes (si elles existent): 1) $f(x)=\dfrac{1+\cos x}{\sqrt{x}}$ 2) $f(x)=\dfrac{x\sin x}{x^2+1}$ ;

Exercice n 14.

On veut trouver la limite en $+\infty$ de $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x}}{x}$

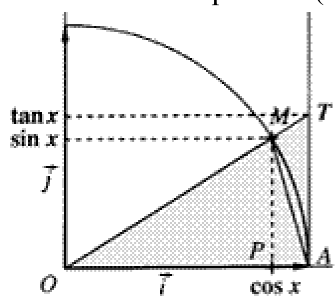
1) Montrer que pour $x$ 0 , $x^2 < 1+x^2 < (1+x)^2$

2) En déduire pour $x$ 0 un encadrement de $f(x)$.

3) En déduire la limite de $f$ en $+\infty$.

Exercice n 15.

Soit $x$ un réel de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les points A(1;0), M($\cos x$;$\sin x$), P($\cos x$;0) et T(1;$\tan x$). Soit $A_1$ l'aire du triangle OAM, $A_2$ l'aire du secteur de disque OAM et $A_3$ l'aire du triangle OAT.




1) En comparant ces aires, prouver que : $\sin x \leq x \leq \tan x$.
2) En déduire que $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$.
3) Déterminer la limite de $\dfrac{\sin x}{x}$ en 0 (étudier les cas $x < 0$ et $x > 0$).

Exercice n 16.

En utilisant le résultat $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (cf exercice précédent), étudie les limites en 0 des fonctions :

1) $x \to \dfrac{\sin 5x}{2x}$ 2) $x \to \dfrac{x}{\sin 3x}$ 3) $x \to \dfrac{\sin 5x}{\sin 4x}$ 4) $x \to \dfrac{\tan x}{x}$

Exercice n 17.

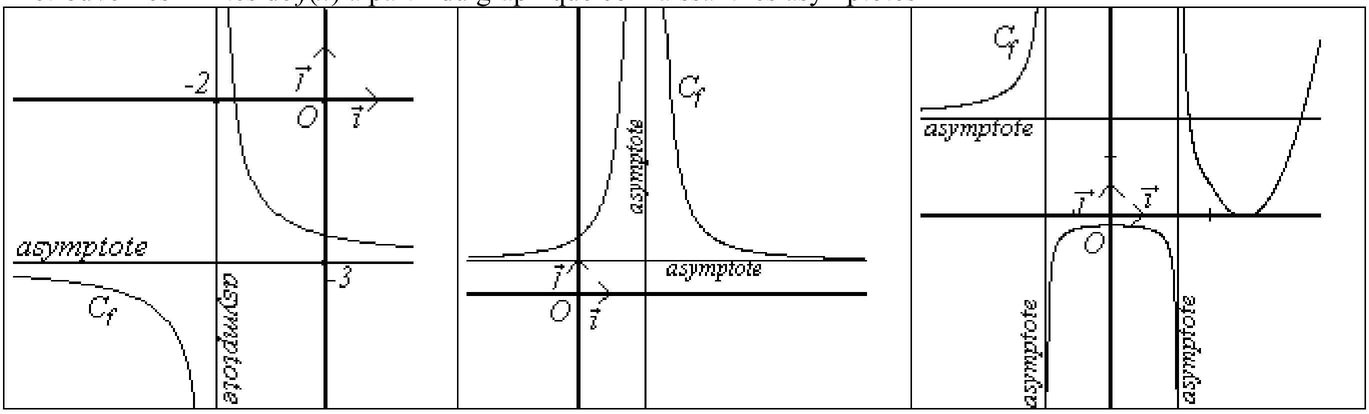
En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

Exercice n 18.

Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\cos 2x - 1}{6x - \pi}$

Exercice n 19.

Retrouver les limites de $f(x)$ à partir du graphique connaissant les asymptotes

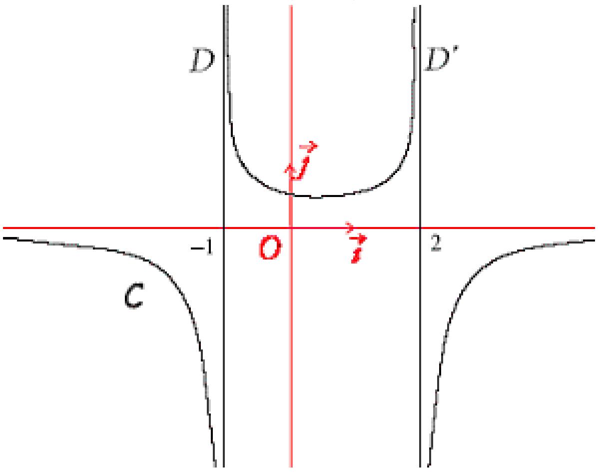


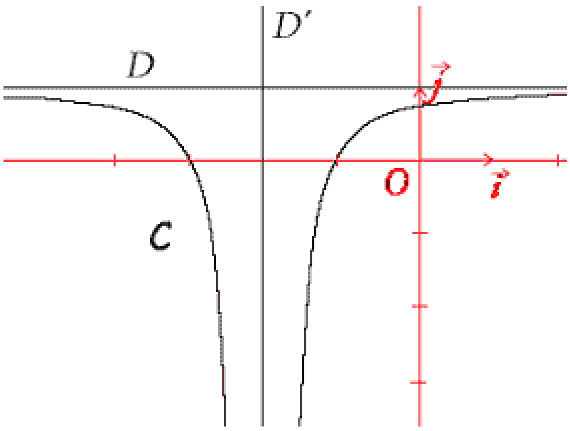

Exercice n 20.

Dans chacun des cas ci-dessous, on donne trois fonctions et la représentation graphique C de l'une d'entre elles. Retrouver celle qui est représentée, en justifiant (qu'est-ce qui permet d'éliminer les 2 autres ?)

**1er cas** $f_1(x) = -\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ ou $f_2(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$ ou $f_3(x) = -\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$

**2ème cas** $g_1(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ ou $g_2(x) = 1 - \dfrac{1}{(x+2)^2}$ ou $g_3(x) = -\dfrac{1}{(x+2)^2}$



Exercice n 21.
Rechercher les asymptotes parallèles aux axes que peuvent présenter les courbes des fonctions suivantes :
1) $f(x)=\frac{3x-1}{x}$ 2) $f(x)=-\frac{1}{x^2}$ 3) $f(x)=\frac{1}{x+2}$ 4) $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$ 5) $f(x)=\frac{2x-1}{x\ -3x+2}$

Exercice n 22.
Soit $f$ la fonction $f(x)=2x+1+\frac{1}{x^2}$. Etudier le comportement de $f$ en 0, $+\infty$ et $-\infty$, en précisant les asymptotes à la courbe représentative de $f$ et les positions relatives de la courbe et de chaque asymptote.

Exercice n 23.
Soit $f$ la fonction $f(x)=\frac{2x^2+3x-1}{x+2}$

1) Détermine trois nombres réels $a$,$b$ et $c$ tels que $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}$ pour $x\neq -2$
2) Etudier le comportement de $f$ en $+\infty$ (limite, asymptote sur la courbe).

Exercice n 24.
Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative de la fonction $f$ définie par
$f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$

Exercice n 25.
Montrer que la droite d'équation $y=2x$ est asymptote pour $x\to+\infty$ à la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$

Exercice n 26.
On considère la fonction $f$ définie par $f(x)=\frac{x^3+3x^2-4x-20}{x+3}$
1) Quel est l'ensemble de définition D de $f$ ?
2) Détermine trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que pour tout $x$ de D, on ait : $f(x)=ax^2+b+\frac{c}{x+3}$
3) Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ; $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}} f(x)$ ; $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax^2+b))$
4) Soit $g$ la fonction numérique définie par : $g(x)=x^2-4$. Etudier le signe de $f(x)-g(x)$ suivant les valeurs de $x$. En déduire les positions relatives des courbes suivant les valeurs de $x$.

Exercice n 27.
Pour tout réel $x$ non nul, on considère la fonction $f$ définie par $f(x)=\frac{(50+x^{20})^2-2500}{x^{20}}$

A l'aide de la calculatrice, remplir le tableau suivant :

| $x$ | 0,6 | 0,5 | 0,4 | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0,01 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valeur approchée de $f(x)$ | | | | | | | |

1) Peut-on conjecturer la limite de $f$ en éro ?
2) En développant $(50+x^{20})^2$, simplifier l'expression de *f(x)* pour $x\neq 0$. Calculer alors la limite de $f$ en éro. Surprenant, non ?

# CORRECTION

Exercice n 1

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$ donc par multiplication $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^4 = -\infty$, c'est à dire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

( ne pas confondre $-x^4$ et $(-x)^4 = x^4$ )

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} -3 + \frac{1}{x} = -3$, c'est à dire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -3$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^3 = +\infty$, c'est à dire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} 5 + \frac{1}{x} = 5$, c'est à dire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 5$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ donc par composition avec la fonction racine, $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{-x} = +\infty$, c'est à dire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+1-\frac{1}{x} = +\infty$

8) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^2 - 4 = 0 - 4 = -4$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ donc par somme $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} (x^2 - 4 + \frac{1}{x}) = +\infty$

9) $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x - 3 = -\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x^2 + x - 3) = -\infty$

10) $\lim\limits_{x\to-\infty} x - 4 = -\infty$ donc par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{x-4} = 0$

11) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} -2 + \frac{3}{x} = -2$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{-2+\frac{3}{x}} = -\infty$

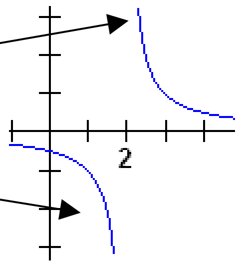
12) $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -x + 1 = -\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} x(-x+1) = -\infty$

13) $\lim\limits_{t\to-\infty} -3t = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} t - 4 = -\infty$ donc par produit $\lim\limits_{t\to-\infty} \left(-3t(t-4)\right) = -\infty$

14) $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} + 3 = 3$ (car $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$) donc par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\frac{1}{x} + 3\right) = -\infty$

15) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} x - 2 = 0^+$ (car $x > 2 \Leftrightarrow x - 2 > 0$) donc par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \frac{1}{x-2} = +\infty$. De la même manière $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} x - 2 = 0^-$ (car $x < 2 \Leftrightarrow x - 2 < 0$) donc par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \frac{1}{x-2} = -\infty$.

Les limites « à gauche » et « à droite » de 2 diffèrent.




16) $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}} x + 3 = 0^+$ (car $x > -3 \Leftrightarrow x + 3 > 0$) donc par quotient (attention à la règle des signes ), $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}} \frac{-2}{x+3} = -\infty$.

De la même manière $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}} x + 3 = 0^-$ (car $x < -3 \Leftrightarrow x + 3 < 0$) donc par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}} \frac{-2}{x+3} = +\infty$.

17) Puisque pour tout réel $x$ on a $x^2 \geq 0$, on a donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^2 = 0^+$ ainsi que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} x^2 = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$ ainsi que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Les limites à gauche et à droite de 0 sont ici identiques.

Exercice n°2.

Il est clair que $\lim\limits_{x\to -1}(x+1)(x-2)=0$ ainsi que $\lim\limits_{x\to 2}(x+1)(x-2)=0$, mais encore faut-il connaître le signe de l'expression $D(x)=(x+1)(x-2)$.

Un tableau de signes nous fournit :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x-2$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(x+1)(x-2)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$D(x)<0$ si $x\in\left]-1;2\right[$

$D(x)>0$ si $x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]2;+\infty\right[$

Ainsi,

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}(x+1)(x-2)=0^+$. Comme $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}x=-1$, on conclut, par quotient, que $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\dfrac{x}{(x+1)(x-2)}=-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}(x+1)(x-2)=0^-$, donc par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\dfrac{x}{(x+1)(x-2)}=+\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}(x+1)(x-2)=0^-$. Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}x=2$, on conclut, par quotient, que $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\dfrac{x}{(x+1)(x-2)}=-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}(x+1)(x-2)=0^+$ , donc par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\dfrac{x}{(x+1)(x-2)}=+\infty$

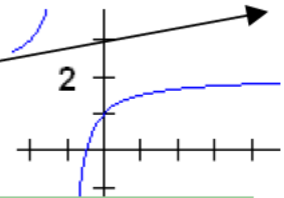
Exercice n°3

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$. En notant $u=\dfrac{2x^2-1}{x}$ on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty}u=+\infty$ et puisque $\lim\limits_{u\to+\infty}\sqrt{u}=+\infty$, en composant, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{2x^2-1}{x}}=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$. En notant $u=\dfrac{1}{x}$ on a donc $\lim\limits_{x\to-\infty}u=0$ et puisque $\lim\limits_{u\to 0}\cos(u)=1$, en composant, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$

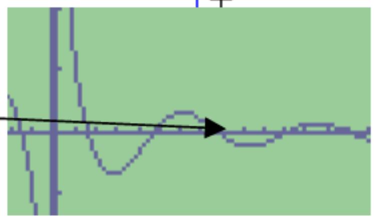
Exercice n°4

1) FAUX. Par exemple, la fonction définie sur $\left[0;+\infty\right[$ par $f(x)=2-\dfrac{1}{x+1}$ est strictement croissant sur $\left[0;+\infty\right[$, positive, et pourtant $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$




2) FAUX. Par exemple, la fonction définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$ vérifie $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ (par encadrement, voir exercice n°), et pourtant sa courbe $C_f$ « oscille » autour de 0.

Cela signifie que les nombres réels $f(x)$ ne sont pas tous de même signe



3) VRAI. Si $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-1$, cela signifie que tout intervalle centré en $-1$ contiendra toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ suffisamment grand. Ainsi, pour $x$ suffisamment grand, on aura, par exemple $-1,5\le f(x)\le -0,5$ donc les nombres $f(x)$ seront tous de même signe

Exercice n°5

Puisque $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=3a+\dfrac{2}{3-b}$, pour avoir $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=+\infty$, il est nécessaire d'avoir $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2}{x-b}=+\infty$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to 3^+}x-b=0^+$, donc $b=3$. Ainsi, pour tout $x\neq 3$, $f(x)=ax+\dfrac{2}{x-3}$ et l'information $\lim\limits_{x\to 5}f(x)=11$ fournit l'indication

$f(5)=11\Leftrightarrow 5a+\dfrac{2}{5-3}=11\Leftrightarrow 5a=10\Leftrightarrow a=2$

Exercice n 6.

1) Puisque $\lim_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} -2x+10 = -\infty$, on est en présence d'une forme indéterminée « $\infty - \infty$ »

Il existe (au moins) deux manières de rédiger :

1[ère] manière :

Puisque $x \to +\infty$, on peut supposer $x \neq 0$

Alors $3x^2 - 2x + 10 = x^2\left(3 - \frac{2x}{x^2} + \frac{10}{x^2}\right) = x^2\left(3 - \frac{2}{x} + \frac{10}{x^2}\right)$ (factorisation par le terme de plus haut degré puis simplification).

Puisque $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{10}{x^2} = 0$, on a, par somme $\lim_{x\to+\infty}\left(3 - \frac{2}{x} + \frac{10}{x^2}\right) = 3$, et puisque $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, on conclut, par produit, que $\lim_{x\to+\infty} x^2\left(3 - \frac{2}{x} + \frac{10}{x^2}\right) = +\infty$, c'est à dire $\lim_{x\to+\infty} 3x^2 - 2x + 10 = +\infty$

Remarque : Plutôt que de mettre $x^2$ en facteur dans l'expression $3x^2 - 2x + 10$, on aurait pu mettre $3x^2$ en facteur, de sorte que $3x^2 - 2x + 10 = 3x^2\left(1 - \frac{2x}{3x^2} + \frac{10}{3x^2}\right) = 3x^2\left(1 - \frac{2}{3x} + \frac{10}{3x^2}\right)$. On raisonne de la même manière, à savoir $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{3x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{10}{3x^2} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{2}{3x} + \frac{10}{3x^2}\right) = 1$, et puisque $\lim_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty$, on conclut, par produit, que $\lim_{x\to+\infty} 3x^2\left(1 - \frac{2}{3x} + \frac{10}{3x^2}\right) = +\infty$, c'est à dire $\lim_{x\to+\infty} 3x^2 - 2x + 10 = +\infty$

2[ère] manière :

On utilise un résultat du cours stipulant que « la limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'un polynôme est la même que celle de son terme de plus haut degré ».

On écrit donc $\lim_{x\to+\infty} 3x^2 - 2x + 10 = \lim_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty$

2) Puisque $\lim_{x\to-\infty} -4x^3 = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} 5x - 2 = -\infty$, on se retrouve dans le cas d'une forme indéterminée « $\infty - \infty$ ».

Le résultat du cours nous indique que $\lim_{x\to-\infty} -4x^3 + 5x - 2 = \lim_{x\to-\infty} -4x^3 = +\infty$

3) On examine les numérateurs et dénominateurs. On trouve $\lim_{x\to+\infty} 3x^2 + 4 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x^2 + x + 1 = +\infty$. On se trouve dans le cas d'une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Il existe (au moins) deux manières de rédiger :

1[ère] manière :

Factorisation des deux membres par leur terme de plus haut degré :

Puisque $x \to +\infty$, on peut supposer $x \neq 0$

Alors $\frac{3x^2+4}{x^2+x+1} = \frac{x^2\left(3 + \frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\cancel{x^2}\left(3 + \frac{4}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{3 + \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$.

Puisque $\lim_{x\to+\infty} 3 + \frac{4}{x^2} = 3$ (par somme), et $\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 1$ (par somme), on déduit, par quotient, que $\lim_{x\to+\infty} \frac{3 + \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{1} = 3$ c'est à dire $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+4}{x^2+x+1} = 3$

2[ère] manière :

On utilise un résultat du cours stipulant que « la limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fraction rationnelle (quotient de deux polynômes) est la même que celle du quotient simplifié de leurs termes de plus haut degrés respectifs »

On écrit donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+4}{x^2+x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 3$

4) Puisque $\lim_{x\to-\infty} -8x^3+1=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} 4x+16=-\infty$, on se retrouve dans le cas d'une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Le résultat du cours nous indique que $\lim_{x\to-\infty}\frac{-8x^3+1}{4x+16}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{8}^2\cancel{x}^{\cancel{3}2}}{\cancel{4}\cancel{x}}=\lim_{x\to-\infty}-2x^2=-\infty$

5) Puisque $\lim_{x\to2} x^2-x-2=0$ et $\lim_{x\to2} x-2=0$, on se retrouve dans le cas d'une forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ».

Il va falloir transformer l'écriture de $\frac{x^2-x-2}{x-2}$ pour «résorber » la forme indéterminée.

Pour tout $x\neq2$, gr ce au calcul de $\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-2)=9$ on détermine les racines du trinôme : $x_1=\frac{1-\sqrt{9}}{2}=-1$ et $x_2=\frac{1+\sqrt{9}}{2}=2$. La forme factorisée du trinôme nous permet de simplifier la fraction :

$x^2-x-2=(x-2)(x+1)$ donc $\frac{x^2-x-2}{x-2}=\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}=x+1$ On conclut que $\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x\to2}x+1=3$

6) Puisque $\lim_{x\to1} x^2+2x-3=0$ et $\lim_{x\to1} 2x^2-x-1=0$, on se retrouve dans le cas d'une forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ».

Gr ce aux calculs des discriminants, on peut factoriser numérateur et dénominateur :

Pour tout $x\neq1$, $\frac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1}=\frac{(x-1)(x+3)}{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\frac{x+3}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}$ donc $\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x+3}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\frac{4}{2\left(1+\frac{1}{2}\right)}=\frac{4}{3}$

7) Puisque $\lim_{x\to9}\sqrt{x}-3=0$ et $\lim_{x\to9} x-9=0$, on se retrouve dans le cas d'une forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ».

Il va falloir transformer l'écriture de $\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ pour «résorber » la forme indéterminée.

Pour tout $x\neq2$, $\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\frac{\sqrt{x}-3}{\left(\sqrt{x}\right)^2-3^2}=\frac{\sqrt{x}-3}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+3}$, donc $\lim_{x\to9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}=\frac{1}{6}$.

Exercice n 7

1) On peut par exemple prendre $f(x)=x+1$ et $g(x)=x$

2) On peut par exemple prendre $f(x)=7x$ et $g(x)=x$

Exercice n 8

1) Puisque $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+3}=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}-\sqrt{x}=-\infty$, on est en présence d'une forme indéterminée « $\infty-\infty$ »

Pour résorber cette forme indéterminée, on utilise la technique de multiplication par la quantité conjuguée :

Pour tout $x\in[0;+\infty[$,

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{x}=\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\times\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=\frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=\frac{x+3-x}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=\frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}$$

Puisque $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+3}=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$, on déduit que $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+3}+\sqrt{x}=+\infty$, et par quotient, $\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=0$, c'est à dire $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+3}-\sqrt{x}=0$

2) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x+3}=+\infty$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2+4x+3=+\infty$) et $\lim\limits_{x\to+\infty}-(x+2)=-\infty$, on est en présence d'une forme indéterminée « $\infty-\infty$ ». Pour résorber cette forme indéterminée, on utilise la technique de multiplication par la quantité conjuguée : Pour tout $x\in[0;+\infty[$,

$$\sqrt{x^2+4x+3}-(x+2)=\left(\sqrt{x^2+4x+3}-(x+2)\right)\times\frac{\sqrt{x^2+4x+3}+(x+2)}{\sqrt{x^2+4x+3}+(x+2)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+4x+3}-(x+2)\right)\left(\sqrt{x^2+4x+3}+(x+2)\right)}{\sqrt{x^2+4x+3}+(x+2)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+4x+3}\right)^2-(x+2)^2}{\sqrt{x^2+4x+3}+(x+2)}=\frac{x^2+4x+3-x^2-4x-4}{\sqrt{x^2+4x+3}+(x+2)}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{x^2+4x+3}+(x+2)}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x+3}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x+2=+\infty$, on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x+3}+x+2=+\infty$, et par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+3}+(x+2)}=0$, c'est à dire $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x+3}-(x+2)=0$

## Exercice n 9

1) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$, d'après le théorème d'encadrement « des gendarmes » , on a $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

2) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$, d'après le théorème d'encadrement « des gendarmes » , on a $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{3}{2}$

3) Si $f(x)\geq 2x-3$, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}2x-3=+\infty$, on en conclut, par utilisation du théorème de minoration, que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. On ne peut rien conclure de plus.

4) Si $f(x)\geq x^2-3$, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-3=+\infty$, on en conclut, par utilisation du théorème de minoration, que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. On peut également utiliser ce théorème lorsque $x\to-\infty$. En effet puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2-3=+\infty$, on en conclut, par utilisation du théorème de minoration, que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$. On ne peut rien conclure de plus.

## Exercice n 10

1) Pour tout $x\in[0;+\infty[$, on calcule $f(x)-3\sqrt{x}=x-\sqrt{x}+4-3\sqrt{x}=x-4\sqrt{x}+4=\left(\sqrt{x}-2\right)^2$.

Un carré étant toujours positif ou nul, on en déduit que pour tout $x\in[0;+\infty[$ $f(x)-3\sqrt{x}\geq 0\Leftrightarrow f(x)\geq 3\sqrt{x}$

2) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}3\sqrt{x}=+\infty$, on en conclut, par utilisation du théorème de minoration, que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

## Exercice n 11

1) Par multiplication par la quantité conjuguée, pour tout $x\in D$,

$$f(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x}=\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)\times\frac{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)\times\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=\frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{x+2-x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$$

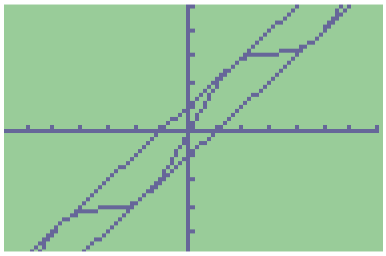
2) Pour tout $x \in \left]0;+\infty\right[$, on a clairement $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} \geq 0$ car $\sqrt{x+2}+\sqrt{x} \geq 0$. De plus,

$$\sqrt{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2}+\sqrt{x} \geq \sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$$

3) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}}=0$, en application du théorème d'encadrement « des gendarmes », on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

Exercice n 12



1) Pour tout $x$ réel $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow x-1 \leq x+\sin x \leq x+1 \Leftrightarrow x-1 \leq f(x) \leq x+1$

2) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$, on conclut, en utilisant le théorème de minoration, que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1=-\infty$, on conclut, en utilisant le théorème de minoration, que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

Exercice n 13

1) Puisque pour tout réel $x$, on a $-1 \leq \cos x \leq 1$, alors pour tout $x$ 0, on a $1-1 \leq 1+\cos x \leq 1+1 \Leftrightarrow 0 \leq 1+\cos x \leq 2$, et par division par $\sqrt{x}$ qui est 0, on déduit que $\frac{0}{\sqrt{x}} \leq \frac{1+\cos x}{\sqrt{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1+\cos x}{\sqrt{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$.

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}}=0$, en application du théorème d'encadrement « des gendarmes », on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

2) Commençons par la limite lorsque $x \to +\infty$. On peut donc supposer que $x$ 0.

Puisque pour tout réel $x$, on a $-1 \leq \sin x \leq 1$, alors pour tout $x$ 0, on a $\frac{-x}{x^2+1} \leq \frac{x\sin x}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1}$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0$, et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, en application du théorème d'encadrement dit « des gendarmes », on conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

La limite lorsque $x \to -\infty$ se traite à l'identique : on peut donc supposer que $x$ 0.

Puisque pour tout réel $x$, on a $-1 \leq \sin x \leq 1$, alors pour tout $x$ 0, on a $\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x\sin x}{x^2+1} \leq \frac{-x}{x^2+1}$ (l'inégalité est en sens inverse de la prcédente)

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0$, et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, en application du théorème d'encadrement dit « des gendarmes », on conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

Exercice n 14

1) Pour $x$ 0 $0<1 \Leftrightarrow x^2 < 1+x^2$. De plus $(1+x)^2 = 1+x^2+2x > 1+x^2$ car $x$ 0. L'encadrement est ainsi démontré.

2) La fonction racine étant strictement croissante sur $\left[0;+\infty\right[$, on déduit de l'encadrement $x^2 < 1+x^2 < (1+x)^2$ que $\sqrt{x^2} < \sqrt{1+x^2} < \sqrt{(1+x)^2} \Leftrightarrow |x| < \sqrt{1+x^2} < |1+x|$

Ne pas oublier que $\sqrt{x^2}=|x|$

Puisque $x$ 0 et $1+x$ 0, on a donc $x < \sqrt{1+x^2} < 1+x$, et enfin par division par $x$, $\frac{x}{x} < \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} < \frac{1+x}{x} \Leftrightarrow 1 < f(x) < 1+\frac{1}{x}$

3) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x}=1$, en application du théorème « des gendarmes », on conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

Exercice n 15

1) On a clairement $A_1 < A_2 < A_3$

On calcule : $A_1 = \frac{OA \times PM}{2} = \frac{1 \times \sin x}{2}$, puis par proportionnalité de l'aire et de la mesure du secteur angulaire, $A_2 = \frac{x}{2}$ (car un angle de $2\pi$ rad correspond à une aire de $\pi r^2 = \pi\, cm^2$, donc un angle de $x$ rad correspond à une aire de $x \times \frac{\pi}{2\pi} = \frac{x}{2}$). Enfin $A_3 = \frac{OA \times AT}{2} = \frac{1 \times \tan x}{2} = \frac{\tan x}{2}$

Puisque $A_1 < A_2 < A_3$ alors $\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}$.

En multipliant les trois membres de l'inégalité par 2, on obtient le résultat attendu.

2) En utilisant les deux premiers termes de l'inégalité, on a $\sin x < x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x} < 1$ (car $x$>0)

En utilisant les deux derniers termes de l'inégalité, on a $x < \tan x \Leftrightarrow x < \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x}$ (car $x$>0)

3) Puisque pour tout $x$>0 , cos $x$ < $\frac{\sin x}{x}$ < 1, et puisque $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$, on en conclut en application du théorème d'encadrement dit « des gendarmes », que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\sin x}{x} = 1$

4) si $x$<0, la configuration des triangles et des secteurs angulaires reste la même, mais les mesures de l'aire (qui doivent être positives ) sont alors égales à $A_1 = -\frac{\sin x}{2}$, $A_2 = -\frac{x}{2}$ et $A_3 = -\frac{\tan x}{2}$

On a donc, pour $x$<0, $-\frac{\sin x}{2} < -\frac{x}{2} < -\frac{\tan x}{2} \Leftrightarrow -\sin x < -x < -\tan x$.

En utilisant les deux premiers termes de l'inégalité, on a $-\sin x < -x \Leftrightarrow \frac{-\sin x}{-x} < 1 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x} < 1$ (car -$x$>0)

En utilisant les deux derniers termes de l'inégalité :

on a $-x < -\tan x \Leftrightarrow -x < \frac{-\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x < \frac{-\sin x}{-x} \Leftrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x}$ (car -$x$>0).

La conclusion de l'exercice reste la même

Exercice n 16

1) On écrit, pour tout $x$ 0 , $\frac{\sin 5x}{2x} = \frac{\sin 5x}{\cancel{5x}} \frac{\cancel{5x}}{2x} == \frac{5}{2} \times \frac{\sin 5x}{5x}$. En posant $u = 5x$, on a $\lim\limits_{x \to 0} u = 0$, et puisque $\lim\limits_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$, on en déduit donc que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1$, donc par produit $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{2x} = \frac{5}{2}$

2) On écrit, pour tout $x$ 0 , $\frac{x}{\sin 3x} = \frac{1}{3} \frac{3x}{\sin 3x}$. Puisque $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, on a aussi $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$, donc en particulier $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x}{\sin 3x} = 1$ (quitte à poser $u = 3x$), d'où, par produit, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin 3x} = \frac{1}{3}$

3) On écrit, pour tout $x$ 0 , $\frac{\sin 5x}{\sin 4x} = \frac{\sin 5x}{5x} \times \frac{4x}{\sin 4x} \times \frac{5x}{4x} = \frac{5}{4} \times \frac{\sin 5x}{5x} \times \frac{4x}{\sin 4x}$. Encore une fois, puisque $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4x}{\sin 4x} = 1$, on conclut, par produit, que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 4x} = \frac{5}{4}$

4) On écrit, pour tout $x$ 0 , $\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x \cos x} = \frac{\sin}{x} \times \frac{1}{\cos x}$. Puisque $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et puisque $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$, on conclut que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \times 1 = 1$

Exercice n 17

1) Si on pose $f(x)=\sqrt{x+6}$, définie sur $[-6;+\infty[$, puisque $f(3)=\sqrt{3+6}=\sqrt{9}=3$, la limite $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$ se réécrit $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$. Or $f$ est dérivable sur $]-6;+\infty[$ et pour tout $x\in]-6;+\infty[$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+6}}$ donc $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)=\frac{1}{2\sqrt{3+6}}=\frac{1}{6}$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}=\frac{1}{6}$

2) Si on pose $f(x)=\sin x$, définie sur $\mathbb{R}$, puisque $f(0)=\sin 0=0$, la limite $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ se réécrit $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. Or $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\cos x$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=\cos 0=1$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

3) Si on pose $f(x)=\cos x$, définie sur $\mathbb{R}$, puisque $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, la limite $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ se réécrit $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\pi/2\right)}{x-\pi/2}$. Or $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=-\sin x$ donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$. Ainsi $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=-1$.

Exercice n 18

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$ - Si on pose $f(x)=\tan x$, alors $f(0)=0$, et ainsi $\frac{\tan x}{x}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

Puisque $f$ est dérivable en 0, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1+\tan^2(0)=1$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ - Si on pose $f(x)=\sqrt{x}$, alors $f(1)=1$, et ainsi $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

Puisque $f$ est dérivable en 1, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=\frac{1}{2\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos 2x-1}{6x-\pi}$ - On commence à écrire $\frac{2\cos 2x-1}{6x-\pi}=\frac{2}{6}\times\frac{\cos 2x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}}$. Pour étudier $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\cos 2x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}}$, on pose $f(x)=\cos 2x$.

Ainsi $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$, et ainsi $\frac{\cos 2x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}}=\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}$.

Puisque $f$ est dérivable en $\frac{\pi}{6}$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}=f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-2\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}\right)=-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$ ,

et ainsi $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos 2x-1}{6x-\pi}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Exercice n°19

1) Sur le premier graphique, on « lit » que la droite d'équation $y=-3$ est asymptote horizontale à $C_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Cela signifie que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-3$. De plus, la droite d'équation $x=-2$ est asymptote verticale à $C_f$, et les limites diffèrent à droite et à gauche de -2. Cela signifie que $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=+\infty$

2) Sur le deuxième graphique, on « lit » que la droite d'équation $y=1$ est asymptote horizontale à $C_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Cela signifie que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$. De plus, la droite d'équation $x=2$ est asymptote verticale à $C_f$, et les limites à droite et à gauche de 2 sont identiques. Cela signifie que $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)=+\infty$

3) Sur le troisième graphique, on « lit » que la droite d'équation $y=3$ est asymptote horizontale à $C_f$ uniquement en $-\infty$. Cela signifie que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$. De plus, la courbe $C_f$ possède deux asymptotes verticales : les droites d'équation $x=2$ et $x=-2$. Les limites à droite et à gauche de ces valeurs sont différentes. Cela signifie que $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=-\infty$ ainsi que $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)=+\infty$.

Exercice n°20

1) La première courbe correspond à $f_3(x)=-\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$ car elle présente deux asymptotes verticales synonymes de valeurs interdites égales à $-1$ et 2, ce qui ne correspond pas à $f_1(x)$. De plus, la courbe se situant en dessous de l'axe des abscisses en $+\infty$ et en $-\infty$, on devrait avoir une fonction « négative » dans ces deux voisinages, ce qui n'est pas le cas de $f_2(x)$

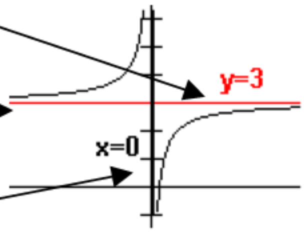
2) La limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction étant égale à 1, on peut éliminer directement $g_1(x)$ et $g_3(x)$, pour ne garder que $g_2(x)=1-\dfrac{1}{(x+2)^2}$

Exercice n°21

1) Pour tout $x\neq0$, $f(x)=\dfrac{3x-1}{x}=3-\dfrac{1}{x}$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} 3-\dfrac{1}{x}=3$ donc la droite d'équation $y=3$ est asymptote horizontale à $C_f$ en $+\infty$.

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} 3-\dfrac{1}{x}=3$ donc la droite d'équation $y=3$ est asymptote horizontale à $C_f$ en $-\infty$.

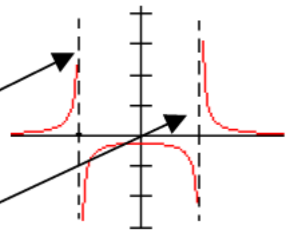



De plus, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} 3-\dfrac{1}{x}=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{1}{x}=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} 3-\dfrac{1}{x}=+\infty$ donc la droite d'équation $x=0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à $C_f$.

2) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{1}{x^2}=0$ donc la droite d'équation $y=0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à $C_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$. De plus $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} -\dfrac{1}{x^2}=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} -\dfrac{1}{x^2}=-\infty$ donc la droite d'équation $x=0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à $C_f$.

3) On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+2}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+2}=0$ donc la droite d'équation $y=0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à $C_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$. De plus $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\dfrac{1}{x+2}=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}\dfrac{1}{x+2}=+\infty$ donc la droite d'équation $x=-2$ est asymptote verticale à $C_f$.

4) On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2-4}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2-4}=0$ donc la droite d'équation $y=0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à $C_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$ De plus $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\dfrac{1}{x^2-4}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}\dfrac{1}{x^2-4}=-\infty$ donc la droite d'équation $x=-2$ est asymptote verticale à $C_f$.



Enfin $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\dfrac{1}{x^2-4}=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\dfrac{1}{x^2-4}=+\infty$

donc la droite d'équation $x=2$ est asymptote verticale à $C_f$.

5) On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$ et de même $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=0$ donc la droite d'équation $y=0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à $C_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Les racines du dénominateur sont 1 et 2. On a donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=-\infty$ donc la droite d'équation $x=1$ est asymptote verticale à $C_f$. Enfin $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=+\infty$ donc la droite d'équation $x=2$ est asymptote verticale à $C_f$.

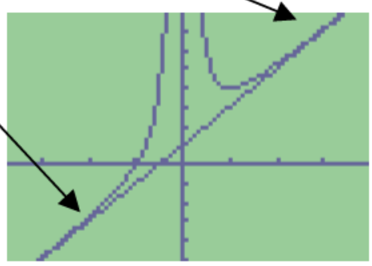
Exercice n°22

Puisque $\lim\limits_{x\to0}2x+1=1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0\\ou\,x<0}}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$, on conclut, par somme, que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0\\ou\,x<0}}f(x)=+\infty$. La droite d'équation $x=0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à $C_f$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}2x+1=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}2x+1=-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

De plus, pour tout $x\neq0$, $f(x)-(2x+1)=2x+1+\dfrac{1}{x^2}-(2x+1)=\dfrac{1}{x^2}$. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-(2x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$.

De la même manière $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-(2x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$. On en conclut que la droite $D$ d'équation $y=2x+1$ est asymptote oblique à $C_f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

Pour connaître la position relative de $D$ et $C_f$, on étudie le signe de $f(x)-(2x+1)=\dfrac{1}{x^2}$. Pour tout $x\neq0$, $f(x)-(2x+1)=\dfrac{1}{x^2}>0$, donc pour tout $x\neq0$, $f(x)>2x+1$. Ceci signifie que sur tout son ensemble de définition, $C_f$ est au dessus de $D$.



Exercice n°23

1) $f$ est définie si et seulement si $x+2\neq0$ donc $D=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$. Pour tout $x\in D$,

$$ax+b+\frac{c}{x+2}=\frac{(ax+b)(x+2)}{x+2}+\frac{c}{x+2}=\frac{ax^2+2ax+bx+2b+c}{x+2}=\frac{ax^2+(2a+b)x+2b+c}{x+2}$$

Donc $ax+b+\dfrac{c}{x+2}=f(x)$ si et seulement si $\dfrac{ax^2+(2a+b)x+2b+c}{x+2}=\dfrac{2x^2+3x-1}{x+2}$ donc si et seulement si

$\begin{cases}a=2\\2a+b=3\\2b+c=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-1\\c=1\end{cases}$. Ainsi, pour tout $x\in D$, $f(x)=2x-1+\dfrac{1}{x+2}$

2) A partir de l'écriture $f(x)=2x-1+\dfrac{1}{x+2}$, on déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=-\infty$, et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=+\infty$.

Mais surtout, puisque, pour tout $x\neq-2$, $f(x)-(2x-1)=2x-1+\dfrac{1}{x+2}-(2x-1)=\dfrac{1}{x+2}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(2x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+2}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+2}=0$, donc la droite $D$ d'équation $y=2x-1$ est asymptote oblique à $C_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$. De plus, pour tout $x>-2$, $f(x)-(2x-1)=\dfrac{1}{x+2}>0$, donc $C_f$ est au dessus de $D$ sur $]-2;+\infty[$, et pour tout $x<-2$, $f(x)-(2x-1)=\dfrac{1}{x+2}<0$, donc $C_f$ est en dessous de $D$ sur $]-\infty;-2[$

Exercice n 24

On calcule, pour tout réel $x$, $f(x)-x=\dfrac{x^3}{x^2+1}-x=\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\times\dfrac{x^2+1}{x^2+1}=\dfrac{x^3-x^3-x}{x^2+1}=\dfrac{-x}{}$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{x}=0$ donc la droite $D$ d'équation $y=x$ est asymptote oblique à $C_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Puisque, pour tout $x$ 0, $\dfrac{-x}{x^2+1}<0$, et pour tout $x$ 0, $\dfrac{-x}{x^2+1}>0$, on en conclut que $C_f$ est au dessus de $D$ sur $]-\infty;0[$ et en dessous de D sur $]0;+\infty[$

Exercice n 25 On calcule, pour tout réel $x$ 1,

$$f(x)-2x=x+\sqrt{x^2-1}-2x=\sqrt{x^2-1}-x=\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\times\frac{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}=\frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}=\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}=\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

Et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$, on conclut que la droite d'équation $y=2x$ est asymptote à $C_f$ en $+\infty$

Exercice n 26

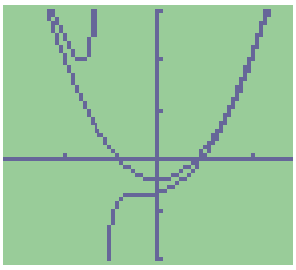
1) $f$ est définie si et seulement si $x+3\neq0$ donc $D=]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[$.

2) Pour tout $x\in D$, $ax^2+b+\dfrac{c}{x+3}=\dfrac{(ax^2+b)(x+3)}{x+3}+\dfrac{c}{x+3}=\dfrac{ax^3+3ax^2+bx+3b+c}{x+3}$

Donc $ax^2+b+\dfrac{c}{x+3}=f(x)$ si et seulement si $\dfrac{ax^3+3ax^2+bx+3b+c}{x+3}=\dfrac{x^3+3x^2-4x-20}{x+3}$ donc si et seulement si $\begin{cases}a=1\\3a=3\\b=-4\\3b+c=-20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-4\\c=-8\end{cases}$. Ainsi, pour tout $x\in D$, $f(x)=x^2-4-\dfrac{8}{x+3}$

3) A partir de l'écriture $f(x)=x^2-4-\dfrac{8}{x+3}$, on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ; $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}} f(x)=-\infty$ (par soustraction car $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}}\dfrac{8}{x+3}=+\infty$) et $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}} f(x)=+\infty$

4) Pour tout $x\in D$, $f(x)-(x^2-4)=x^2-4-\dfrac{8}{x+3}-(x^2-4)=-\dfrac{8}{x+3}$. Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty}-\dfrac{8}{x+3}=0$, on déduit l'existence d'une **PARABOLE ASYMPTOTE** à $C_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.



De plus , si $x$ -3 , $-\dfrac{8}{x+3}<0$, et pour tout $x$ -3 , $-\dfrac{8}{x+3}>0$,

on en conclut que $C_f$ est au dessus de $C_g$ sur $]-\infty;-3[$ et en dessous de $C_g$ sur $]-3;+\infty[$.

Exercice n°27.

La calculatrice fournit, grâce au menu TABLE :
On est donc tenté de conjecturer que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$


Or, pour tout $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{\left(50+x^{20}\right)^2 - 2500}{x^{20}} = \dfrac{2500+100x^{20}+x^{40}-2500}{x^{20}} = \dfrac{100x^{20}+x^{40}}{x^{20}} = 100 + x^{20}$

Ce qui permet de conclure que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 100$ !

# Chapitre 10

# La dérivabilité d'une fonction numerique

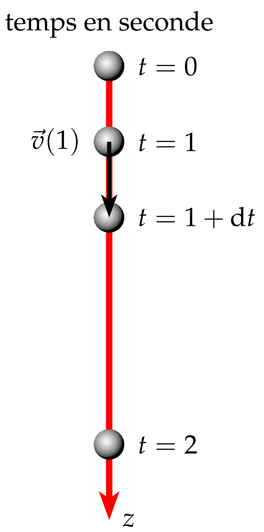
## I ) Un problème historique

La notion de fonction dérivée ne s'est pas construite en un jour. Un petit problème historique va nous permettre de comprendre les difficultés qu'ont rencontrées les mathématiciens pour définir la fonction dérivée.

Tout commence avec Newton (1643-1727) avec la détermination de la vitesse instantané pour un objet en chute libre.

**Exemple :** Soit une pierre que l'on lâche à $t = 0$ s. Quelle est sa vitesse instantanée au bout d'une seconde ?

Newton savait depuis Galilée que si l'on néglige la force de frottement de l'air sur une pierre (matière compacte), sa vitesse ne dépend pas de sa masse. Galilée a pu déterminer l'équation horaire (position de l'objet en fonction du temps) d'un objet en chute libre. Cette équation est de la forme, en prenant $g = 10$ m.s$^{-2}$ comme accélération de la pesanteur :




$$z(t) = \frac{1}{2}gt^2 = 5t^2$$

Pour calculer la vitesse instantanée en $t = 1$, on mesure la distance entre les instants $t = 1$ et $t = 1 + \mathrm{d}t$, où l'intervalle de temps $\mathrm{d}t$ est le plus petit possible (quantité infinitésimal).

$$v(1) = \frac{z(1 + \mathrm{d}t) - z(1)}{\mathrm{d}t}$$

$$v(1) = \frac{5(1 + \mathrm{d}t)^2 - 5}{\mathrm{d}t}$$

$$v(1) = \frac{5 + 10\mathrm{d}t + 5\mathrm{d}t^2 - 5}{\mathrm{d}t}$$

$$v(1) = 10 + 5\mathrm{d}t$$

Pour Newton la vitesse en $t = 1$ s est de $10$ m.s$^{-1}$. Mais la vitesse est-elle exactement égale à $10$ m.s$^{-1}$ ou d'environ $10$ m.s$^{-1}$ ?

- Si la vitesse est exactement de $10$ m.s$^{-1}$ alors $\mathrm{d}t = 0$
- mais si $\mathrm{d}t = 0$, la notion de vitesse instantanée n'a aucun sens : le dénominateur est nul.
- Si la vitesse instantanée est d'environ 10 m.s$^{-1}$ comment calculer la vitesse exacte ?

Ce problème a opposé les mathématiciens. Les uns donnaient raison à Newton, les autres critiquaient sa méthode peu rigoureuse.
Ce blocage ne fut résolu qu'au XIXe siècle avec la notion de limite. Si cette notion de limite est cette fois rigoureuse, elle a malheureusement complexifiée le problème de départ. Avec ce nouveau concept de limite, la vitesse instantanée en $t = 1$ vaut :

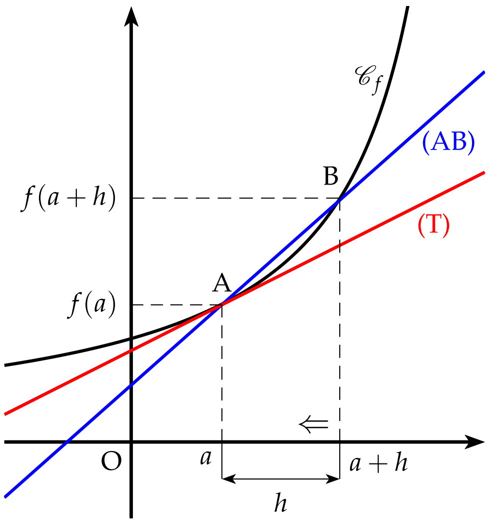
$$v(1) = \lim_{\mathrm{d}t \to 0} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

La vitesse en 1 est la limite quand $\mathrm{d}t$ tend vers 0 de la variation d'altitude, $\mathrm{d}z$, sur la variation de temps $\mathrm{d}t$.

***Remarque*** **:** La notion rigoureuse de limite sera vue en terminale. Pour ce chapitre nous nous contenterons d'utiliser la méthode intuitive de Newton.

# II ) Le nombre dérivé

## 1 ) Définition




Le coefficient directeur $\alpha$ de la droite (AB) est :

$$\alpha = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si le point B se rapproche du point A ($h$ tend vers 0), la droite (AB) se rapproche de la tangente (T) à la courbe en $x = a$. Le coefficient directeur de cette tangente (T) est appelé **nombre dérivé**. Ce nombre dérivé est noté $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

***Définition*** : Soit une fonction $f$ définie sur un intervalle ouvert I et $a$ un point de I.

- On appelle **taux d'accroissement** (ou taux de variation) de la fonction $f$ entre $a$ et $a+h$, le nombre $t$ défini par :

$$t = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

- La fonction $f$ admet un **nombre dérivé**, noté $f'(a)$, en $a$, si et seulement si, le taux d'accroissement de la fonction $f$ en $a$ **admet une limite**, c'est à dire :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{ou encore} \quad f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

***Remarque :***

- On utilisera par la suite la première notation.
- Les physiciens utilisent la notation appelée différentielle : $f'(a) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$

## 2) *Dérivabilité a gauche et a` droite*

*Définition*

Soit $x_0 \in I$.
On dit que $f$ est dérivable à droite (resp. à gauche) en $x_0$ si le taux d'accroissement de $f$ admet une limite finie à droite (resp. à gauche) en $x_0$. Cette limite est appelée nombre dérivé à droite (resp. à gauche) et on note $f'_d(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ resp. $f'_g(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

*Proposition*

Soit $x_0$ un point intérieur à I. Alors
$f$ est dérivable en $x_0$ ssi $\big(f$ est dérivable à droite et à gauche en $x_0$ **et** $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)\big)$.
Dans ce cas $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

**Interprétation graphique :** si $f$ n'est pas dérivable en $x_0$ mais l'est à droite (ou à gauche) en $x_0$, on dit que $f$ admet une demi-tangente en $x_0$ (même équation en remplaçant $f'(x_0)$ par $f'_d(x_0)$ (ou $f'_d(x_0)$).)

***Exemple important :***

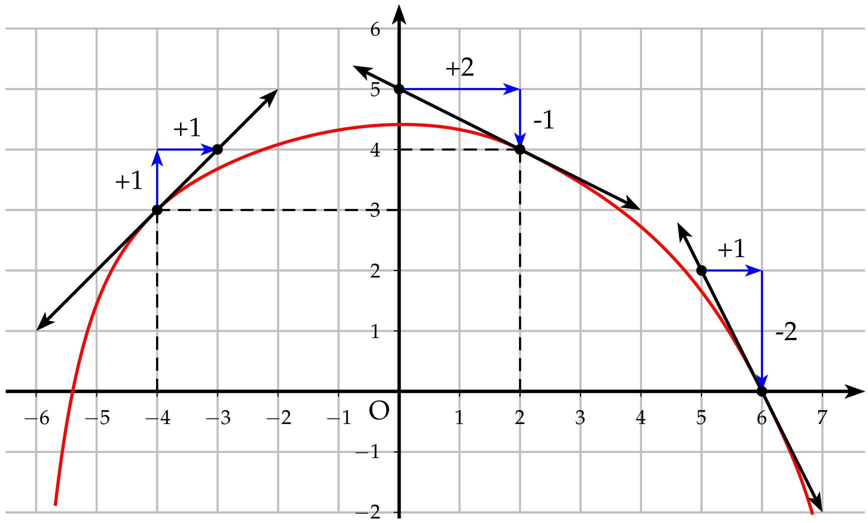
$f : x \to |x|$ admet une dérivée a gauche et a droite en 0 : $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$.
$1 \neq -1$,(0 est un point anguleux) donc $f$ n'est pas déivable en 0 .

## 3 ) Exemples

Deux exemples graphiques pour montrer la signification du nombre dérivé.

La courbe représentative $f$ est donnée ci-après. En chacun des points indiqués, la courbe admet une tangente qui est tracée. La fonction admet donc des nombres dérivés en ces points. Lire, en se servant du quadrillage les nombres suivants :

- $f(-4)$ et $f'(-4)$
- $f(2)$ et $f'(2)$
- $f(6)$ et $f'(6)$

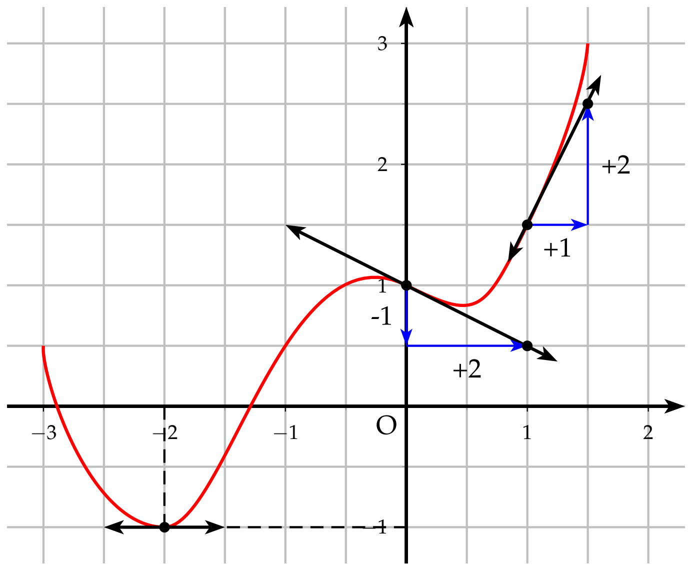



On lit les images et les nombres dérivés suivants :

$$\begin{cases} f(-4) = 3 \\ f'(-4) = \dfrac{1}{1} = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} f(-2) = 4 \\ f'(2) = \dfrac{-1}{2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} f(6) = 0 \\ f'(6) = \dfrac{-2}{1} = -2 \end{cases}$$

La courbe représentative $g$ est donnée ci-dessous. En chacun des points indiqués, la courbe admet une tangente qui est tracée. La fonction admet donc des nombres dérivés en ces points. Lire, en se servant du quadrillage les nombres suivants :

- $g(-2)$ et $g'(-2)$
- $g(0)$ et $g'(0)$
- $g(1)$ et $g'(1)$




On lit les images et les nombres dérivés suivants :

$$\begin{cases} g(-2) = -1 \\ g'(-2) = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} g(0) = 1 \\ g'(0) = -\dfrac{1}{2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} g(1) = 1,5 \\ g'(1) = \dfrac{2}{1} = 2 \end{cases}$$

# III ) Fonction dérivée. Dérivée des fonctions élémentaires

## 1 Fonction dérivée

*Définition* : Soit une fonction $f$ définie sur un intervalle I.
Si la fonction $f$ admet un nombre dérivé en tout point de I, on dit que la fonction $f$ est dérivable sur I. La fonction, notée $f'$, définie sur I qui a tout $x$ associe son nombre dérivé est appelée **fonction dérivée** de $f$.

***Remarque*** : Le but du paragraphe suivant est de déterminer les fonctions dérivées des fonctions élémentaires puis d'établir des règles opératoires afin de pou-voir déterminer la dérivée d'une fonction quelconque.

## 2) Fonction dérivée des fonctions élémentaires

### a ) Fonction affine

Soit $f$ la fonction affine suivante : $f(x) = ax + b$

La fonction affine est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminons

le taux d'accroissement en $x$ :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{a(x+h)+b-ax-b}{h} = \frac{ah}{h} = a$$

On passe à la limite : $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} a = a$

### *b) Fonction carrée*

Soit $f$ la fonction carrée : $f(x) = x^2$

La fonction carrée est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Déterminons le taux d'accroissement en $x$ :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x+h$$

On passe à la limite : $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} 2x+h = 2x$

### *c ) Fonction puissance (admis)*

$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(x^n)' = nx^{n-1}$

**Exemple** : Soit $f(x) = x^5$ on a alors $f'(x) = 5x^4$.

### d ) Fonction inverse

Soit $f$ la fonction inverse : $f(x) = \dfrac{1}{x}$

La fonction inverse est définie et dérivable sur $]-\infty\,;\,0[$ ou sur $]0\,;+\infty[$.

Déterminons le taux d'accroissement en $x \neq 0$ :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h} = \frac{-h}{h \times x(x+h)} = \frac{-1}{x(x+h)}$$

On passe à la limite : $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{x(x+h)} = -\dfrac{1}{x^2}$

### e) Fonction puissance inverse (admis)

$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ ou sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)' = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$

**Exemple** : Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$ on a alors $f'(x) = -\dfrac{4}{x^5}$.

### f) Fonction racine

Soit $f$ la fonction racine carrée : $f(x) = \sqrt{x}$

La fonction racine est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

⚠ La fonction racine est définie mais pas dérivable en 0. Sa courbe représentative admet une tangente verticale en 0 et donc l'équation de cette tangente n'admet pas de coefficient directeur.

Déterminons le taux d'accroissement en $x \neq 0$ :

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &= \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\end{aligned}$$

On passe à la limite :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

## 3) Règles de dérivation

Dans tout ce paragraphe, on considère deux fonctions $u$ et $v$ et un réel $\lambda$

### b) Dérivée de la somme

On peut montrer facilement que la dérivée de la somme est la somme des dérivée car $(u+v)(x) = u(x)+v(x)$

La dérivée de la somme : $\boxed{(u+v)' = u'+v'}$

**Exemple :** Soit la fonction $f$ telle que : $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$

en appliquant la règle de la somme : $f'(x) = 2x - \dfrac{1}{x^2}$

### b) Produit par un scalaire

On peut montrer facilement que la dérivée du produit par un scalaire est le produit du scalaire par la dérivée car $(\lambda\, u)\,(x) = \lambda\, u(x)$

La dérivée du produit par un scalaire : $\boxed{(\lambda\, u)' = \lambda\, u'}$

**Exemple :** Soient : $f(x) = 3x^4$ et $g(x) = 5x^3 + 12x^2 - 7x + 3$

en appliquant la règle ci-dessus : $f'(x) = 3(4x^3) = 12x^3$
en appliquant les deux règles : $g'(x) = 15x^2 + 24x - 7$

### c) Dérivée du produit

⚠ La démonstration n'est pas au programme. Elle est donnée ici à titre indicatif.
Calculons le taux d'accroissement de $(uv)\,(x) = u(x)v(x)$ :

$$\frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h} = \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

On retranche puis on ajoute un même terme

$$\begin{aligned}
\frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h} &= \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h) + u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \\
&= \frac{v(x+h)(u(x+h) - u(x)) + u(x)(v(x+h) - v(x))}{h} \\
&= v(x+h)\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + u(x)\frac{v(x+h) - v(x)}{h}
\end{aligned}$$

On passe ensuite à la limite :

$$\begin{aligned}
(uv)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[ v(x+h)\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + u(x)\frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right] \\
&= \lim_{h\to 0} v(x+h) \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h\to 0} u(x) \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \\
&= v(x)u'(x) + u(x)v'(x)
\end{aligned}$$

La dérivée du produit : $\boxed{(uv)' = u'v + uv'}$

⚠ La dérivée du produit n'est malheureusement pas le produit des dérivées !

**Exemple :** Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que : $f(x) = (3x+1)\sqrt{x}$

$f$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $f'(x) = 3\sqrt{x} + (3x+1)\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{6x + 3x + 1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{9x+1}{2\sqrt{x}}$

## *d ) Dérivée de l'inverse*

⚠ La démonstration n'est pas au programme. Elle est donnée ici à titre indicatif.

Calculons le taux d'accroissement de $\left(\frac{1}{v}\right)(x) = \frac{1}{v(x)}$ :

$$\frac{\frac{1}{v(x+h)} - \frac{1}{v(x)}}{h} = \frac{\frac{v(x)-v(x+h)}{v(x)v(x+h)}}{h} = -\frac{v(x+h)-v(x)}{h} \times \frac{1}{v(x+h)v(x)}$$

On passe ensuite à la limite :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{v}\right)' &= \lim_{h\to 0}\left[-\frac{v(x+h)-v(x)}{h} \times \frac{1}{v(x+h)v(x)}\right] \\ &= \lim_{h\to 0} -\frac{v(x+h)-u(x)}{h} \times \lim_{h\to 0}\frac{1}{v(x+h)v(x)} = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}\end{aligned}$$

La dérivée de l'inverse : $\boxed{\frac{1}{v} = -\frac{v'}{v^2}}$

**Exemple :** Soit la fonction $f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$

En appliquant la règle de l'inverse : $f'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

## *e ) Dérivée du quotient*

On cherche la dérivée du produit par l'inverse : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \times \frac{1}{v}\right)'$

D'après la règle du produit, on obtient : $\left(\frac{u}{v}\right)' = u'\frac{1}{v} + u\frac{-v'}{v^2} = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

La dérivée du quotient : $\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}}$

**Exemple :** Soit la fonction $f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = \frac{2x+5}{x^2+1}$

En appliquant la dérivée du quotient :

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1)-2x(2x+5)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2-10x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2-10x+2}{(x^2+1)^2}$$

## *f ) Dérivée de la puissance et de la racine*

⚠ On donne sans démonstration la dérivée de la puissance et de la racine.

$$\boxed{(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1} \quad \text{et} \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$$

**Exemple :** Soient $f(x) = (3x-5)^5$ et $g(x) = \sqrt{x^2+1}$

En appliquant les règles sur la dérivée de la puissance et de la racine, on a :

$$f'(x) = 5 \times 3(3x-5)^4 = 15(3x-5)^4 \quad \text{et} \quad g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

## 4 Tableau récapitulatif

Voici le tableau des fonctions élémentaires que l'on vient de montrer ainsi que les fonctions trigonométriques sinus et cosinus.

| Fonction | $D_f$ | Dérivée | $D'_f$ |
|---|---|---|---|
| $f(x) = k$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = 0$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = x$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = 1$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = \frac{1}{x}$ | $\mathbb{R}^*$ | $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ | $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$ |
| $f(x) = \frac{1}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}^*$ | $\mathbb{R}^*$ | $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$ | $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$ |
| $f(x) = \sqrt{x}$ | $[0;+\infty[$ | $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0;+\infty[$ |
| $f(x) = \sin x$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = \cos x$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = \cos x$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = -\sin x$ | $\mathbb{R}$ |

Voici maintenant les principales règle de dérivation.

| | |
|---|---|
| Dérivée de la somme | $(u+v)' = u' + v'$ |
| Dérivée du produit par un scalaire | $(\lambda u)' = \lambda u'$ |
| Dérivée du produit | $(uv)' = u'v + uv'$ |
| Dérivée de l'inverse | $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ |
| Dérivée du quotient | $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ |
| Dérivée de la puissance | $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ |
| Dérivée de la racine | $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ |

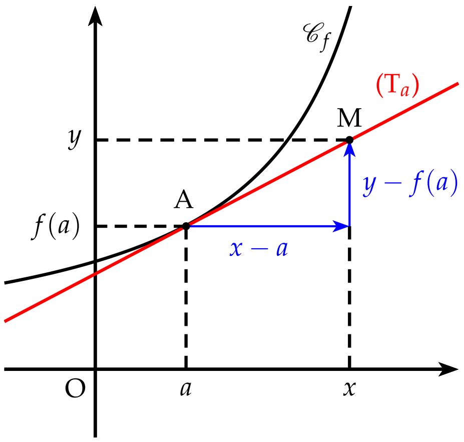
**Remarque :** Les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles sont dérivables sur leur ensemble de définition.

# IV) Interprétations géométrique et numérique

## 1 Équation de la tangente

Soit la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction $f$ et $(T_a)$ sa tangente en $x = a$.

On a alors le schéma suivant :




Le coefficient directeur de la tangente est égal au nombre dérivé en $a$. Si on considère un point $M(x; y)$ quelconque de cette tangente, on obtient alors :

$$f'(a) = \frac{y - f(a)}{x - a}$$

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

***Théorème 1*** **:** L'équation de la tangente $(T_a)$ en $a$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction $f$ dérivable en $a$ est égale à :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

**Exemple :** Soit la fonction $f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4$$

Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 2.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 2 est :

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2)$$

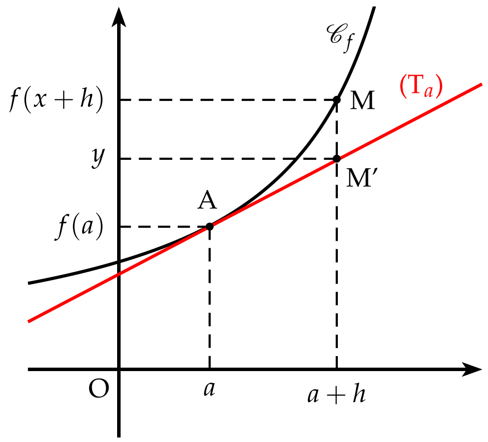
On détermine l'expression de la dérivée : $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$
On calcule ensuite :

$$\begin{cases} f'(2) = 3 \times 2^2 - 6 \times 2 + 3 = 12 - 12 + 3 = 3 \\ f(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 4 = 8 - 12 + 6 + 4 = 6 \end{cases}$$

On obtient donc l'équation de la tangente suivante :

$$y = 3(x - 2) + 6 \quad \Leftrightarrow \quad y = 3x - 6 + 6 \quad \Leftrightarrow \quad y = 3x$$

## 2 ) Approximation affine




Lorsque $x$ est proche de $a$, on peut confondre en première approximation le point M sur la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction $f$ avec le point M′ d'abscisse $x$ de la tangente $(\mathrm{T}_a)$ à la courbe en $a$.
On pose $x = a + h$ avec $h$ proche de 0.
Si on confond le point M avec le point M′, on a :

$$y \simeq f(a+h)$$

On obtient alors : $\boxed{f(a+h) \simeq f(a) + h f'(a)}$

**Exemple :** Déterminer une approximation affine de $\sqrt{4,03}$.

On pose $f(x) = \sqrt{x}$, on a $a = 4$ et $h = 0,03$. On calcule alors la dérivée en 4.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{donc} \quad f'(4) = \frac{1}{4}$$

$$\text{et donc} \quad f(4,03) \simeq f(4) + 0,03 \times \frac{1}{4} \simeq 2,0075$$

On obtient donc : $\sqrt{4,03} \simeq 2,0075$ à comparer à $\sqrt{4,03} \simeq 2{,}007\,486$. La précision est donc de $10^{-4}$.

## 3 ) Cinématique

La cinématique est l'étude du mouvement : position, vitesse, accélération d'un solide en physique. C'est justement l'étude de la vitesse instantannée qui a permis à Newton de concevoir le concept de dérivée. La vitesse est alors la dérivée de l'équation horaire et l'accélération la dérivée de la vitesse par rapport au temps.

**Exemple :** Deux mobiles $M_1$ et $M_2$ sont sur l'axe des abscisses animé d'un mouvement dont les lois horaires en fonction du temps $t$ sont respectivement

$$x_1(t) = 2t^2 + t + 4 \quad \text{et} \quad x_2 = -t^2 + 5t + 8$$

a) Calculer l'instant auquel les deux mobiles se rencontrent.

b) Calculer les vitesses respectives de ces deux mobiles à cet instant.

c) En déduire si lors de la rencontre, les deux mobiles se croisent ou si l'un dépasse l'autre.

a) Pour que les deux mobiles se rencontrent, il faut que leurs abscisses soient les mêmes. On a donc : $x_1(t) = x_2(t)$ soit

$$2t^2 + t + 4 = -t^2 + 5t + 8 \quad \Leftrightarrow \quad 3t^2 - 4t - 4 = 0$$

On calcule le discriminant : $\Delta = 16 + 48 = 64 = 8^2$

On obtient deux solutions : $t_1 = \dfrac{4+8}{6} = 2$ ou $t_2 = \dfrac{4-8}{6} = -\dfrac{2}{3}$

On ne retient que la solution positive (on ne sait pas ce qui se passe avant $t = 0$). Les mobiles se rencontrent donc au bout de 2 secondes.

b) La vitesse est déterminée par la dérivée de la loi horaire. En dérivant, on obtient les vitesses des deux mobiles en fonction du temps :

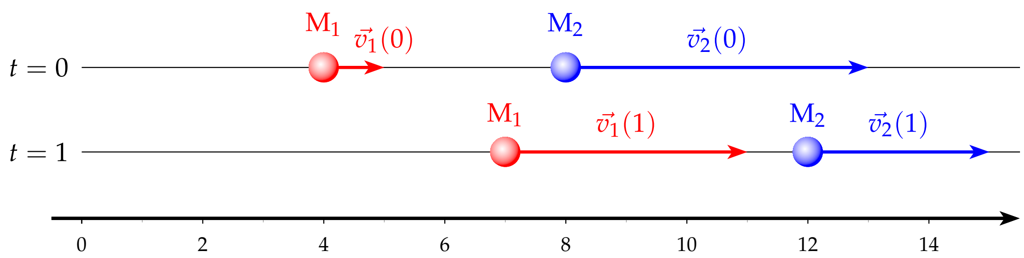
$$v_1(t) = 4t + 1 \quad \text{et} \quad v_2(t) = -2t + 5$$

Si au point de rencontre, les vitesses ont même signe, l'un des mobiles double l'autre, si les vitesses ont des signes opposées, les mobiles se croisent. Calculons les vitesses à $t = 2$.

$$v_1(2) = 9 \quad \text{et} \quad v_2(2) = 1$$

c) Les vitesses ont même signe, donc les mobiles se rencontrent, comme $v_1(2) > v_2(2)$, c'est le mobile 1 qui double le mobile 2.

**Remarque :** On peut simuler (position et vitesse) des deux mobiles en fonction du temps. Par exemple aux deux moments à $t = 0$ s et $t = 1$ s.




# V ) Sens de variation d'une fonction

## 1 ) Sens de variation

On admettra le théorème suivant qui précise le lien entre variation et dérivée.

***Théorème 2*** **:** Soit une fonction $f$ dérivable sur un intervalle I.

- Si la fonction dérivée $f'$ est **nulle**, alors la fonction est **constante**.
- Si la fonction dérivée est **strictement positive** (sauf en quelques point isolé de I où elle s'annule), alors la fonction $f$ est **strictement croissante** sur I.
- Si la fonction dérivée est **strictement négative** (sauf en quelques point isolé de I où elle s'annule), alors la fonction $f$ est **strictement décroissante** sur I.

**Exemple :** Déterminer les variations de la fonction $f$ dérivable sur $\mathbb{R}$ :

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$$

- On calcule la dérivée : $f'(x) = -3x^2 + 6x = 3x(-x+2)$
- On cherche les valeurs qui annulent la dérivée :

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

- Le signe de $f'(x)$ est celui d'un trinôme du second degré.
  On obtient le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ | $6$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

## 2 ) Extremum d'une fonction

***Théorème 3*** **:** Soit une fonction $f$ dérivable sur un intervalle I.

- Si $c \in$ I est un extremum local de $f$ sur I alors $f'(c) = 0$
- Si $c \in$ I, $f'(c) = 0$ et si $f'$ change signe en $c$ alors $c$ est un extremum local de $f$ sur I.

**Exemple :** Sur la fonction $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$, étudiée plus haut, la dérivée $f'(x) = 3x(-x+2)$, s'annule et change de signe en 0 et 2. On en déduit que 0 et 2 sont des extremum de $f$, respectivement minimum et maximum.

**Remarque :** Les extremum locaux d'une fonction sont à chercher parmi les zéros de la dérivée, mais si $f'(a) = 0$, $a$ n'est pas nécessairement un extremum local. En effet, soit $f(x) = x^3$, sa dérivée $f'(x) = 3x^2$ s'annule en 0 mais ne change pas de signe. 0 n'est pas un extremum local.

# *Exercices corrigés*

## Exercice 1 : déterminer le nombre dérivé d'une fonction

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x$.

1. En utilisant la définition du nombre dérivé, montrer que $f$ est dérivable en $1$ et déterminer $f'(1)$.
2. Vérifier le résultat sur la calculatrice.

Solution :

1. Pour tout réel $h$ non nul,n le taux d'accroissement de $f$ entre $1$ et $1+h$ est :

$$\tau(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 + (1+h) - (1^2+1)}{h} = \frac{3h+h^2}{h} = 3+h$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0}(3+h) = 3$. Donc $f$ est dérivable en $1$ et $f'(1) = 3$.

| |
|---|
| Pour trouver la limite de $\tau(h)$ lorsque $h$ tend vers 0, on peut souvent remplacer $h$ par $0$ après avoir simplifié l'expression (plus de $h$ au dénominateur). |

2.

| TI | Casio |
|---|---|
| Appuyer sur la touche $\boxed{\texttt{MATH}}$ puis $\boxed{8}$ (nbreDérivé) : nbreDérivé $= (X^2 + X, X, 1)$ | En mode RUN-MATH, utiliser les instructions $\boxed{\texttt{F4}}$ (MATH) puis $\boxed{\texttt{F4}}$ (d/dx) : $\dfrac{d}{dx}(X^2 + X, 1)$ |

## Exercice 2 : la même chose, plein de fois

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le nombre dérivé en $a$ (en utilisant la définition) :

1. $f_1(x) = 5x - 3$ et $a = 1$
2. $f_2(x) = 3x^2 + 2x - 1$ et $a = 2$
3. $f_3(x) = \sqrt{x+3}$ et $a = -1$
4. $f_4(x) = \dfrac{x}{x+1}$ et $a = -2$

Solution :

1. Pour tout $h \neq 0$, le taux d'accroissement de $f_1$ entre $1$ et $1+h$ est : $\tau_1(h) = \dfrac{f_1(1+h) - f_1(1)}{h}$ (*)
$(*) \Leftrightarrow \tau_1(h) = \dfrac{5(1+h) - 3 - (5\times 1 - 3)}{h}$
$(*) \Leftrightarrow \tau_1(h) = \dfrac{5h}{h}$
$(*) \Leftrightarrow \tau_1(h) = 5$
Or, $\lim\limits_{h\to 0} 5 = 5$, donc $f_1$ est dérivable en $a = 1$ et $f_1'(1) = 5$.

2. Pour tout $h \neq 0$, le taux d'accroissement de $f_2$ entre $2$ et $2+h$ est : $\tau_2(h) = \dfrac{f_2(2+h) - f_2(2)}{h}$ (*)
$(*) \Leftrightarrow \tau_2(h) = \dfrac{3(2+h)^2 + 2(2+h) - 1 - (3\times 2^2 + 2\times 2 - 1)}{h}$
$(*) \Leftrightarrow \tau_2(h) = \dfrac{3h^2 + 14h}{h}$
$(*) \Leftrightarrow \tau_2(h) = 3h + 14$
Or, $\lim\limits_{h\to 0} 3h + 14 = 14$, donc $f_2$ est dérivable en $a = 2$ et $f_2'(2) = 14$.

3. Pour tout $h \neq 0$, le taux d'accroissement de $f_3$ entre $-1$ et $-1+h$ est : $\tau_3(h) = \dfrac{f_3(-1+h) - f_3(-1)}{h}$ (*)
$(*) \Leftrightarrow \tau_3(h) = \dfrac{\sqrt{(-1+h)+3} - \sqrt{-1+3}}{h}$
$(*) \Leftrightarrow \tau_3(h) = \dfrac{\left(\sqrt{2+h} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2+h} + \sqrt{2}\right)}{h\times\left(\sqrt{2+h} + \sqrt{2}\right)}$

$(*) \Leftrightarrow \tau_3(h) = \dfrac{2+h-2}{h \times \left(\sqrt{2+h}+\sqrt{2}\right)}$

$(*) \Leftrightarrow \tau_3(h) = \dfrac{h}{h \times \left(\sqrt{2+h}+\sqrt{2}\right)}$

$(*) \Leftrightarrow \tau_3(h) = \dfrac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}$

Or, $\lim\limits_{h \to 0} \sqrt{2+h}+\sqrt{2} = \sqrt{2}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, donc $\lim\limits_{h \to 0} \tau_3(h) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Par conséquent, $f_3$ est dérivable en $a=-1$ et $f_3'(-1) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

4. Pour tout $h \neq 0$, le taux d'accroissement de $f_4$ entre $-2$ et $-2+h$ est : $\tau_4(h) = \dfrac{f_4(-2+h)-f_4(-2)}{h}$ (*)

$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \dfrac{\dfrac{-2+h}{-2+h+1} - \dfrac{-2}{-2+1}}{h}$

$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \dfrac{\dfrac{-2+h}{h-1} - \dfrac{-2}{-1}}{h}$

$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \dfrac{\dfrac{-2+h}{h-1} - \dfrac{-2}{-1}}{h}$

$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \dfrac{1}{h} \times \dfrac{-2+h}{h-1} - \dfrac{2(h-1)}{h-1}$

$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \dfrac{1}{h} \times \dfrac{-h}{h-1}$

$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \dfrac{-1}{h-1}$

Or, $\lim\limits_{h \to 0} h-1 = -1$, donc $\lim\limits_{h \to 0} \tau_4(h) = \dfrac{-1}{-1} = 1$.
Par conséquent, $f_4$ est dérivable en $a=-2$ et $f_4'(-2) = 1$.

## Exercice 3 : tangente par le nombre dérivé

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - x$.

1. Déterminer une équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à $\mathcal{C}_f$ au point $A$ d'abscisse $1$.
2. Vérifier le résultat sur calculatrice.

Solution :

1. Afin de déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A$ d'abscisse $1$, déterminons tout d'abord si $f$ est dérivable en $1$.
   - Méthode 1 : Calculons la limite du taux d'accroissement $\tau$ de $f$ entre $1$ et $1+h$. Pour tout $h \neq 0$ :

$$\tau(h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{2(1+h)^2-(1+h)-(2\times 1^1 - 1)}{h} = \frac{2h^2+3h}{h} = 2h+3$$

     Or, $\lim\limits_{h \to 0}(2h+3) = 3$, donc $f$ est dérivable en $1$ et $f'(1) = 3$.
   - Méthode 2 : La fonction $f$ est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition et, pour tou $x$ réel, on a

$$f'(x) = 2 \times 2x - 1 = 4x - 1$$

     En particulier, $f$ est dérivable en $1$ et $f'(1) = 4 \times 1 - 1 = 3$.

   Nous avons donc montré que $f$ est dérivable en $1$ et que $f'(1) = 3$. Par conséquent, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente non verticale, de coefficient directeur $f'(1) = 3$. Donc $(\mathcal{T})$ a une équation de la forme : $y = 3x + p$.
   Or, $A(1\ ;\ f(1)) \in (\mathcal{T})$, donc $y_A = 3x_A + p$ $(*)$.
   $(*) \Leftrightarrow f(1) = 3 \times 1 + p$
   $(*) \Leftrightarrow 2 \times 1^2 - 1 = 3 + p$
   $(*) \Leftrightarrow 1 - 3 = p$
   $(*) \Leftrightarrow p = -2$
   La tangente $(\mathcal{T})$ à $\mathcal{C}_f$ au point $A(1\ ;\ f(1))$ a donc pour équation $y = 3x - 2$.

| TI | Casio |
|---|---|
| (a) Saisir l'expression de $f(x)$ en Y1<br>(b) Appuyer sur la touche graphe et choisir l'instruction dessin (2nde PRGM) puis 5 (Tangente)<br>(c) Régler la fenêtre d'affichage<br>(d) Préciser la valeur de $x$ en appuyant sur 1. Valider par ENTER. La tangente s'affiche ainsi qu'une équation (éventuellement approchée). | (a) Choisir l'instruction SET UP (SHIFT MENU). Activer le mode Derivative : choisir ON (F1), suivi de EXE<br>(b) Saisir la fonction en Y1 et tracer la courbe<br>(c) Choisir l'instruction Sketch (SHIFT F4). Sélectionner Tang (F2)<br>(d) Appuyer sur 1 pour sélectionner la valeur de $x$, puis taper deux fois sur la touche EXE. La tangente s'affiche ainsi qu'une équation (éventuellement approchée). |

## Exercice 4 : Calculer des nombres dérivés à l'aide des formules

Pour les fonctions suivantes, déterminer le nombre dérivé en $x = 2$ puis en $x = \frac{1}{2}$ :

1. $f(x) = x^2$
2. $g(x) = x^3$
3. $h(x) = \frac{1}{x}$
4. $i(x) = x^5$
5. $j(x) = \sqrt{x}$

Solution :

1. La fonction $f$ est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition. Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a :
$$f'(x) = 2x$$
Par conséquent, $f'(2) = 2 \times 2 = 4$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$.
2. La fonction $g$ est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition. Pour tout $x \in \mathcal{D}_g$, on a :
$$g'(x) = 3x^2$$
Par conséquent, $g'(2) = 3 \times 2 = 6$ et $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.
3. La fonction $h$ est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition. Pour tout $x \in \mathcal{D}_h$, on a :
$$h'(x) = -\frac{1}{x^2}$$
Par conséquent, $h'(2) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$ et $h'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -4$.
4. La fonction $i$ est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition. Pour tout $x \in \mathcal{D}_i$, on a :
$$i'(x) = 5x^4$$
Par conséquent, $i'(2) = 5 \times 2^4 = 80$ et $i'\left(\frac{1}{2}\right) = 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}$.

5. La fonction $j$ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$. Pour tout $x>0$, on a :
$$j'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
Par conséquent, $j'(2)=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ et $i'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

## Exercice 5 : Tangente en utilisant les formules de dérivation

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$. Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer une équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à $\mathcal{C}_f$ au point $A$ d'abscisse 1.
2. Existe-t-il une tangente à $\mathcal{C}_f$ parallèle à la droite (d) d'équation$y=3x-4$ ?
   Si oui, déterminer les coordonnées du point de contact.

Solution :

1. La fonction $f$ est une fon,ction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel $x$, $f'(x)=2x$.
   Par conséquent, la tangente $(\mathcal{T})$ à $\mathcal{C}_f$ au point $A$ d'abscisse 1 a pour coefficient directeur $f'(1)=2$. Son équation est donc
   $$y=2x+p \text{ avec } p\in\mathbb{R}$$
   De plus, $A(1\ ;\ f(1))\in(\mathcal{T})$, donc $y_A=2x_A+p$, c'est-à-dire $f(1)=2\times1+p$, d'où $p=1-2=-1$.
   Donc
   $$(\mathcal{T})\ :\ y=2x-1$$
2. La fonction $f$ étant dérivable sur $\mathbb{R}$, le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x$ est $f'(x)=2x$.
   S'il existe une tangente parallèle à la droite $(d)$ alors son coefficient directeur est le même que $(d)$, c'est-à-dire $3$. On cherche donc un réel $x$ tel que
   $$f'(x)=3\ (*)$$
   $(*)\Leftrightarrow 2x=3$
   $(*)\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$
   Donc $\mathcal{C}_f$ admet une tangente parallèle à $(d)$ au point $M\left(\frac{3}{2}\ ;\ f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$ soit $M\left(\frac{3}{2}\ ;\ \frac{9}{4}\right)$.

## Exercice 6 : encore une tangente avec un joli calcul de dérivée

Soit $f$ la fonction définie par $f(x)=\frac{2x-3}{x^2+1}$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de $f$.

1. Quel est l'ensemble de définition de $f$ ?
2. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ au point $A$ d'abscisse $1$.
3. Vérifier le résultat sur calculatrice.

Solution :

1. Pour tout réel $x$, $x^2+1\neq0$, donc $f$ est définie sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $f$ est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x)=2x-3$ et $v(x)=x^2+1$.
   Les fonction s$u$ et $v$ sont des fonctions polynômes, elles sont donc dérivables sur leur ensemble de définition $\mathbb{R}$. On a alors, pour tout réel $x$ :
   $u'(x)=2$ et $v'(x)=2x$.
   De plus, la fonction $v$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel $x$ :
   $$f'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{v^2(x)}=\frac{2(x^2+1)-(2x-3)\times2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+6x+2}{(x^2+1)^2}$$
   La fonction $f$ est donc dérivable en $a=1$ et $f'(1)=\frac{-2\times1^2+6\times1+2}{(1^2+1)^2}=\frac{3}{2}$.
   Le coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ au point $A$ d'abscisse 1 est donc $f'(1)=\frac{3}{2}$.
   Donc $\mathcal{T}$ a pour équation $y=\frac{3}{2}x+p$ où $p\in\mathbb{R}$.
   De plus, $A(1;\ f(1))\in\mathcal{T}$, donc $y_A=\frac{3}{2}x_A+p$, soit $\frac{-1}{2}=\frac{3}{2}+p$, donc $p=-2$.
   D'où
   $$\mathcal{T}\ :\ y=\frac{3}{2}x-2$$

3. Voir l'exercice sur la tangente via le nombre dérivé (exercice 3).

## Exercice 7 : tangente sans l'expression de la fonction

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction $f$ dérivable en $3$. On sait que $f(3) = -2$ et $f'(3) = 0,5$.
Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $3$.

Solution :
La fonction $f$ est dérivable en $3$, donc la tangente $(T)$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $3$ a pour équation $y = f'(3)x + p = 0,5x + p$, avec $p \in \mathbb{R}$.
Or, $f(3) = -2$, donc la tangente passe par le point $A(3\ ;\ -2)$. Par conséquent, $y_A = 0,5x_A + p$, soit $-2 = 0,5 \times 3 + p$, d'ù $p = -\dfrac{7}{2}$.
La tangente $(T)$ a donc pour équation $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{7}{2}$.

## Exercice 8 : autour du nombre dérivé

Soit $f$ la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

1. Calculer $f'(9)$ et $f'(3)$.
2. Existe-t-il des valeurs de $x$ pour lesquelles $f'(x) = 2$ ?
3. Existe-t-il des valeurs de $x$ pour lesquelles $f'(x) = -1$ ?

Solution :

1. La fonction $f$ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

   Par conséquent, $f'(9) = \dfrac{1}{2\sqrt{9}} = \dfrac{1}{6}$ et $f'(3) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.
2. Pour tout $x > O$, $f'(x) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{16}$.

   Il existe donc un unique réel tel que $f'(x) = 2$ : $x = \dfrac{1}{16}$.
3. Pour tout $x > O$, $f'(x) = -1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = -1$. Or, pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$. Par conséquent, il n'existe pas de réel $x$ tel que $f'(x) = -1$.

## Exercice 9 : Tangente et second degré (que du bonheur !)

Soit $f$ la fonction trinôme définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$. On note $\mathcal{P}$ sa courbe représentative.
On sait que $f(0) = 2$ ; $f(-1) = 5$ et $f'(-1) = 2$.

1. Monter que les réels $a$, $b$ et $c$ sont solution d'un système de trois équations à trois inconnies. Résoudre ce système.
2. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse $-1$.

Solution :

1. $f(0) = 2 \Leftrightarrow a \times 0^2 + b \times 0 + c = 2 \Leftrightarrow c = 2$.
   $f(-1) = 5 \Leftrightarrow a - b + c = 5 \Leftrightarrow a - b = 5 - c \Leftrightarrow a - b = 3$.
   La fonction $f$ est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel $x$, $f'(x) = 2ax + b$. Donc : $f'(-1) = 2 \Leftrightarrow 2a(-1) + b = 2 \Leftrightarrow -2a + b = 2$.
   Nous devons alors résoudre le système suivant :
   $$\begin{cases} a - b = 3 \\ -2a + b = 2 \end{cases}$$
   Ce système est équivalent à
   $$\begin{cases} a = 3 + b \\ -2(3 + b) + b = 2 \end{cases}$$
   c'est-à-dire
   $$\begin{cases} a = 3 + b \\ b = -8 \end{cases}$$
   Par conséquent, $f$ est définie sur $_R$ par $f(x) = -5x^2 - 8x + 2$.
   Vérifications :

(a) $f(0) = 2$
(b) $f(-1) = -5 + 8 + 2 = 5$
(c) $f'(-1) = -10 \times (-1) - 8 = 2$

2. $f$ est dérivable en $-1$ et $f(-1) = 2$. Donc la tangente à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse $-1$ a pour équation $y = 2x + p$, avec $p \in \mathbb{R}$.
   De plus, cette tangente passe par le point $A(1\ ;\ f(1))$, donc $f(1) = 2 + p$, soit $-5 - 8 + 2 = 2 + p$, d'où $p = -13$.
   La tangente à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse $-1$ a donc pour équation $y = 2x - 13$.

# *Chapitre 11*

# *Etude des fonctions numeriques*

## I Asymptotes

### 1)Asymptote verticale

**Définition :** Soit $a$ un nombre réel.
Lorsque $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ (respectivement $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$), on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote (verticale) à la courbe représentant $f$.

**Remarque :** Cette définition est aussi valable pour les limites à droite ou à gauche.
**Exemple :** On reprend l'exemple du 2.3.1.
On a vu que :

$$\lim_{\substack{x\to\frac{1}{3}\\ x<\frac{1}{3}}} \frac{x-2}{3x-1} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to\frac{1}{3}\\ x>\frac{1}{3}}} \frac{x-2}{3x-1} = -\infty$$

Donc la droite d'équation $x = \frac{1}{3}$ est asymptote à la courbe représentant la fonction $x \longrightarrow \frac{x-2}{3x-1}$.

### Asymptote horizontale

**Définition :** Soit $l$ un réel.
Lorsque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ (respectivement $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$), on dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote (horizontale) à la courbe représentant $f$.

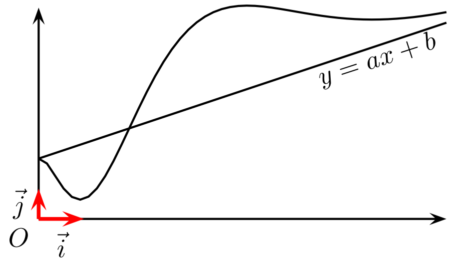
**Exemple :** On reprend l'exemple du 2.3.2.
On a vu que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x^3} = 0$$

Donc la droite d'équation $y = 0$ (c'est-à-dire l'axe des abscisses) est asymptote à la courbe représentant la fonction $x \longrightarrow \frac{x+2}{x^3}$.

### 3) Asymptote oblique

**Définition :** Soit $\Delta$ la droite d'équation $y = ax + b$.
Si $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ (respectivement $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$) alors la droite $\Delta$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant $f$.




**Exemple** : $\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x + 1 + \frac{1}{x} \end{aligned}$

- $\mathcal{C}_f$ admet-elle une droite comme asymptote en $+\infty$ ?
- Justifier.

**Exemple** : $\begin{aligned} f : \mathcal{D}_f &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x^2 - 1} + 2x \end{aligned}$

- Déterminer $\mathcal{D}_f$ ;
- Prouver que la droite $d : y = 3x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ ;
- $\mathcal{C}_f$ admet-elle une asymptote oblique en $-\infty$ ? (*attendre ce qui suit pour répondre à cette question*)

**Exemple :** Soit $f$ la fonction définie sur $[0\,; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 5x + 1}{2x + 1}$$

et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = -x + 3$.

$$\begin{aligned} f(x) - (-x+3) &= \frac{-2x^2 + 5x + 1}{2x + 1} - (-x+3) \\ &= \frac{-2x^2 + 5x + 1 - (-x+3)(2x+1)}{2x+1} \\ &= \frac{-2x^2 + 5x + 1 - \left(-2x^2 + 6x - x + 3\right)}{2x+1} \\ &= \frac{-2x^2 + 5x + 1 + 2x^2 - 6x + x - 3}{2x+1} \\ &= -\frac{2}{2x+1} \end{aligned}$$

Or, $\lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{2}{2x+1}\right) = 0$, donc $\mathcal{D}$ est asymptote à la courbe représentant la fonction $f$.

**Remarque :** Pour étudier la position de la courbe représentant $f$ par rapport à son asymptote, il suffit d'étudier le signe de $\phi(x) = f(x) - (ax + b)$.

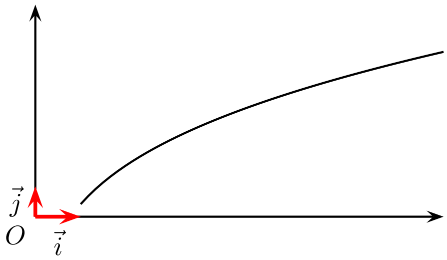
**Exercice :** Reprendre l'exemple précédent et étudier les positions relatives de la courbe représentant $f$ et de son asymptote.

# II Branches paraboliques

## 1) Branche parabolique de direction $(Ox)$

On dit que $\mathcal{C}_f$ présente une **branche parabolique de direction asymptotique** $(Ox)$ en $+\infty$ si :

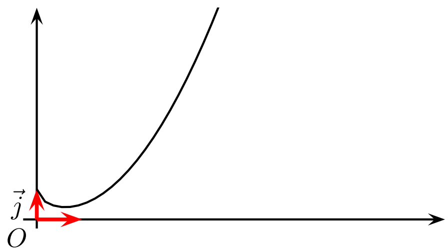
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ ;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ ;




## 2) Branche parabolique de direction $(Oy)$

On dit que $\mathcal{C}_f$ présente une **branche parabolique de direction asymptotique** $(Oy)$ en $+\infty$ si :

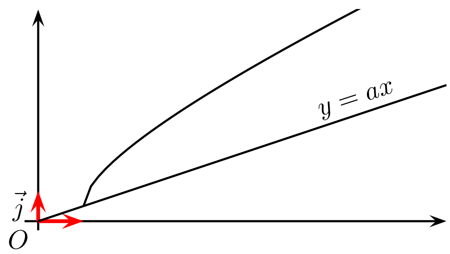
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ ;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$ ;




## 3) Branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$

On dit que $\mathcal{C}_f$ présente une **branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation** $y = ax$ en $+\infty$ si :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ ;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ ;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = \pm\infty$ ;




# III ) Convexité – Point d'inflexion

## 1) Notion de convexité, de concavité

**Définition :** Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

- On dit que $f$ est convexe sur $I$ si, sur l'intervalle $I$, la courbe $\mathcal{C}$ est entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes.
- On dit que $f$ est concave sur $I$ si, sur l'intervalle $I$, la courbe $\mathcal{C}$ est entièrement au-dessous de chacune de ses tangentes.

**Exemples :**

1. La fonction carrée $x \to x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$ (voir figure 1).

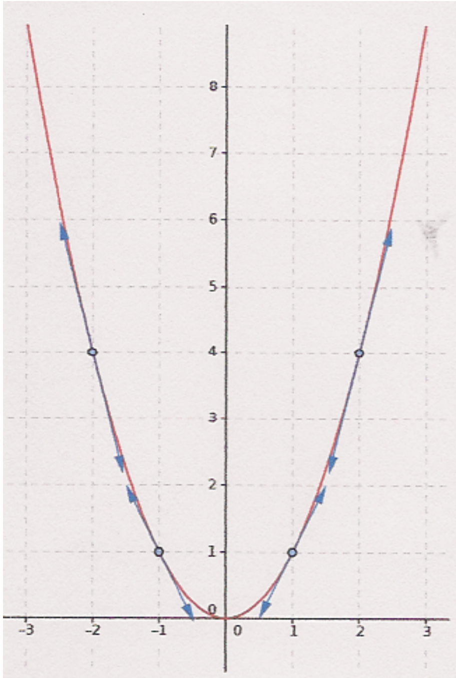


Figure 1 – La fonction carrée

2. La fonction racine carrée $x \to \sqrt{x}$ est concave sur $[0\,;+\infty[$ (voir figure 2).
3. La fonction inverse $x \to \frac{1}{x}$ est concave sur sur $]-\infty\,;0[$ et convexe sur $]0\,;+\infty[$ (voir figure 3).

## 2) Point d'inflexion

**Définition :** Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$, $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère et $a \in I$.
On dit que le point $A\,(a\,;\,f\,(a))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}$ si, en $A$, la courbe $\mathcal{C}$ traverse sa tangente.

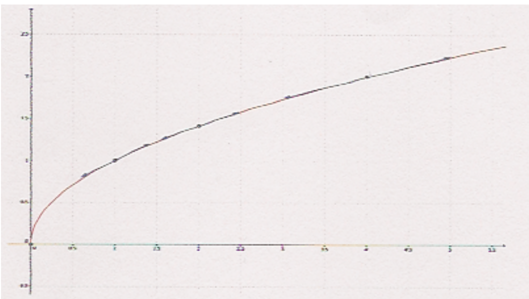


Figure 2 – La fonction racine carrée

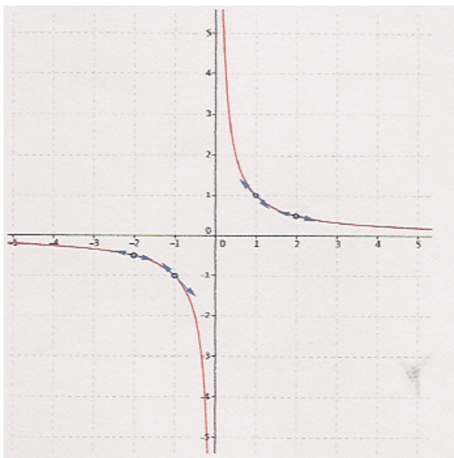


Figure 3 – La fonction inverse

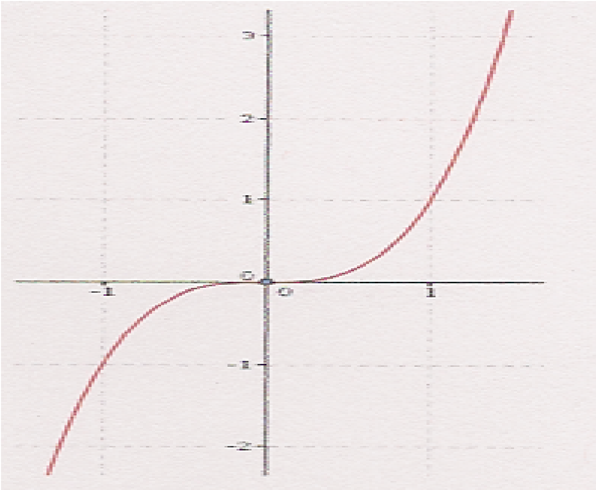


FIGURE 4 – La fonction cube

**Exemple :** La fonction cube $x \to x^3$ admet un point d'inflexion en l'origine $O$ du repère (voir figure 6). Elle est concave sur $]-\infty\,; 0]$ et convexe sur $[0\,; +\infty[$.

**Remarque :** En l'abscisse $a$ du point d'inflexion, la courbe $\mathcal{C}$ passe de concave à convexe ou de convexe à concave.

### 3 ) Convexité et opérations

**Propriété 1 :** Soit $f$ et $g$ deux fonctions dérivables et convexes sur un intervalle $I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
- La fonction $f + g$ est convexe sur $I$.
- Si $\lambda > 0$, la fonction $\lambda f$ est convexe sur $I$.
- Si $\lambda < 0$, la fonction $\lambda f$ est concave sur $I$.

**Propriété 2 :** Soit $f$ et $g$ deux fonctions dérivables et concaves sur un intervalle $I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
- La fonction $f + g$ est concave sur $I$.
- Si $\lambda > 0$, la fonction $\lambda f$ est concave sur $I$.
- Si $\lambda < 0$, la fonction $\lambda f$ est convexe sur $I$.

## III ) Convexité et dérivées

### 1 ) Convexité et sens de variation de$f'$

**Théorème :** (admis)

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$.
- $f$ est convexe sur $I$ si et seulement si $f'$ est croissante sur $I$.
- $f$ est concave sur $I$ si et seulement si $f'$ est décroissante sur $I$.

## 2 ) Convexité et signe de $f''$

Définition : Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$.
Si la dérivée $f'$ de $f$ est elle aussi dérivable sur $I$, on dit que $f$ est deux fois dérivable sur $I$ et on note $f''$ la dérivée de $f'$ sur $I$.
$f''$ est appelée dérivée seconde de $f$.

**Exemple :**

1. $f(x) = 3x^2 - 3x + 1$
   $f'(x) = 6x - 3$
   $f''(x) = 6$

**Théorème :**

Soit $f$ une fonction deux fois dérivable sur un intervalle $I$.
- $f$ est convexe sur $I$ si et seulement si $f''$ est positive sur $I$.
- $f$ est concave sur $I$ si et seulement si $f''$ est négative sur $I$.

## 3 ) Point d'inflexion et dérivée seconde

**Théorème :** (admis)

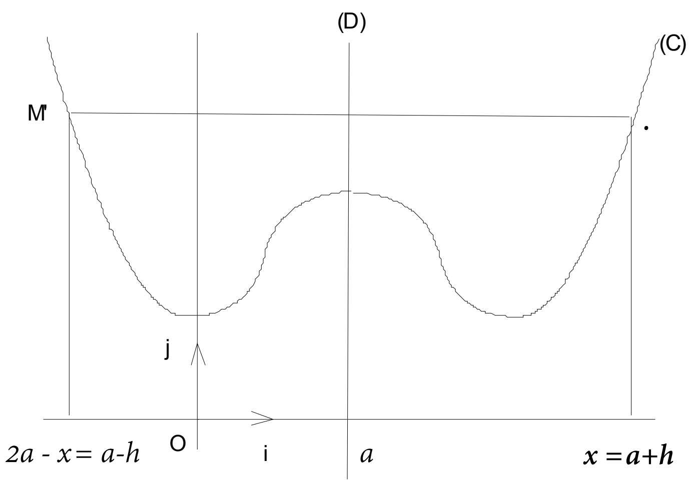
Soit $f$ une fonction deux fois dérivable sur un intervalle $I$ et $a \in I$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de $f$.
La courbe $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion au point $A(a\,;\,f(a))$ si et seulement si $f''$ s'annule en changeant de signe en $a$.

# *IV )Axe et centre de symétrie d'une représentation graphique de fonction.*

*oit Āf une fonction définie sur l'ensemble Df et qui est représentée graphiquement dans un repère or-*

thogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par une courbe (C).

***Axe de symétrie***




*La droite (D) d'équation x = a est axe de symétrie de (C) si et seulement si, pour tout M∈ (C), son symétrique M' par rapport à (D) appartient aussi à (C). On traduit cela par l'une des deux propriétés équivalentes ci-dessous:*

- *Pour tout x∈ Df, on a:*

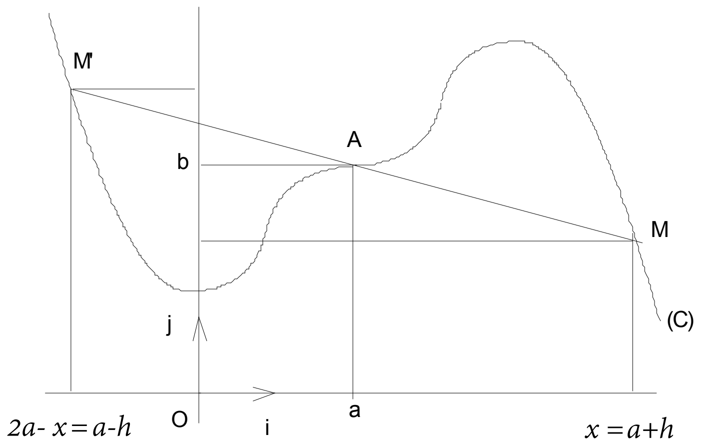
  $2a - x \in Df$ *et* $f(2a - x) = f(x)$

- *Pour tout* $h \in IR$ *tel que* $a + h \in Df$*, on a:*

  ***a − Ā∈ Df et***
  ***f(a + ) = f(a Ā− h)***

*Dans le cas particulier où a = 0, on retrouve la propriété du graphique d'une fonction paire: Axe de symétrie: axe des ordonnées.*

***Centre de symétrie***




*Le point A de coordonnées (a;b) est centre de symétrie de (C) si et seulement si, pour tout M∈ (C), son symétrique M' par rapport à A appartient aussi à (C). On traduit cela par l'une des deux propriétés équivalentes ci-dessous:*

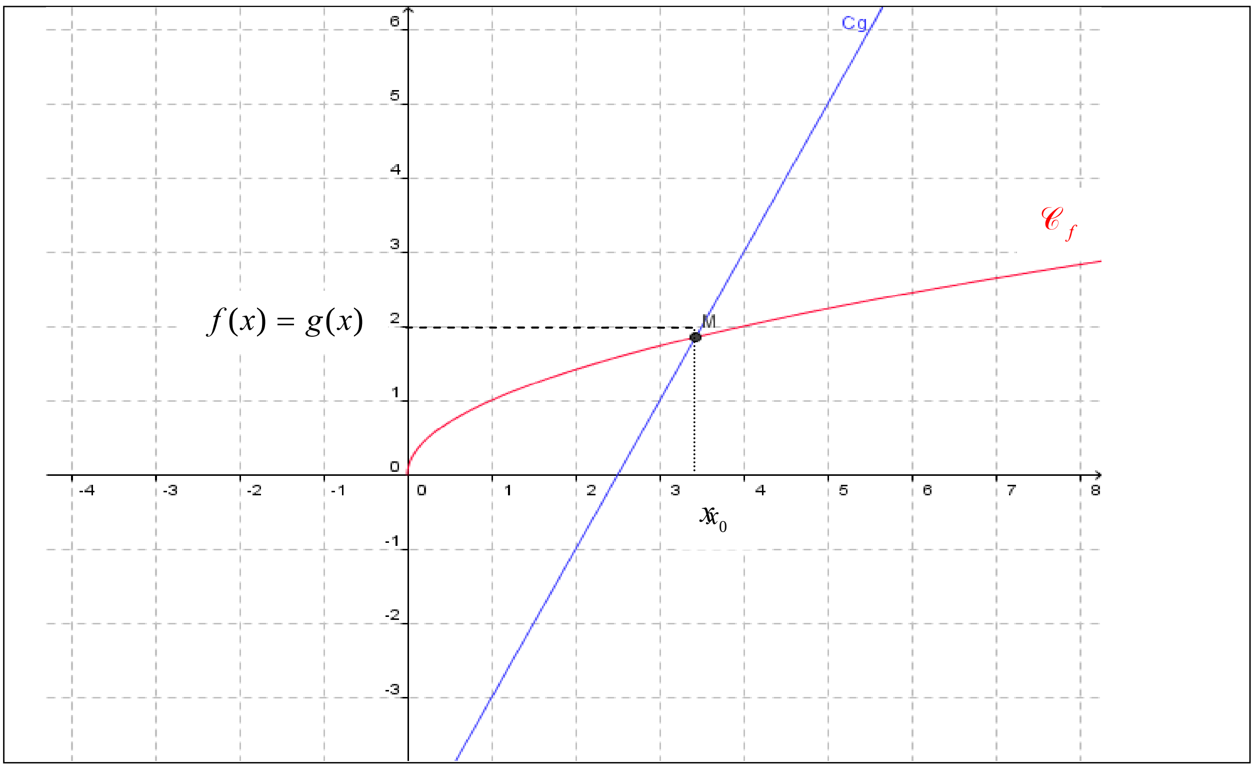
- *Pour tout* $x \in Df$*, on a:*
  $\boldsymbol{2a - x \in Df}$ ***et***
  $\boldsymbol{f(2a - x) + f(x) = 2b}$
- *Pour tout* $h \in IR$ *tel que* $a + h \in Df$, on a:
  $a - h \in Df$ *et*
  $f(a + h) + f(a - h) = 2b$

*Dans le cas particulier où a = b = 0, on retrouve la propriété du graphique d'une fonction impaire: Centre de symétrie: origine O du repère.*

## *V ) Position relative de deux courbes*

### 1. Principe

On considère deux fonction $f$ et $g$ définies sur leurs ensembles de définitions. Soient $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives respectives. On suppose que ces courbes ont des points d'intersection. Par exemple :



Soit $x_0$ l'abscisse du point d'intersection.
Graphiquement, on voit que :
- pour $x = x_0$, il y a intersection.

- pour $x > x_0$, la courbe de $f$ est en dessous de celle de g
- pour $x < x_0$, la courbe de $f$ est au dessus de celle de g

On peut dire également que :
- pour $x = x_0$, $f(x) = g(x)$
- pour $x > x_0$, $f(x) < g(x)$
- pour $x < x_0$, $f(x) > g(x)$

En fait, on doit "prévoir" par le calcul ce positionnement relatif des deux courbes.
Ceci revient donc à comparer les expressions $f(x)$ et $g(x)$
Or e, mathématiques, on utilise le principe suivant :
" **pour comparer deux nombres, on étudie le signe de leur différence**"

Par conséquent, pour étudier la position relative de deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, on étudie le signe de la différence $f(x) - g(x)$.

- Dans le cas où $f(x) - g(x) > 0$, on en déduit que $f(x) > g(x)$ et par conséquent $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$

- Dans le cas où $f(x) - g(x) < 0$, on en déduit que $f(x) < g(x)$ et par conséquent $\mathscr{C}_f$ au dessous de $\mathscr{C}_g$

- Dans le cas où $f(x) - g(x) = 0$, il y a intersection

### 2) Exemple

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = -x^2 - 4x - 3$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2x - 6$ et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Etudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

………….

pour étudier la position relative de deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, on étudie le signe de la différence $f(x) - g(x)$.
Pour tout réel $x$, $f(x) - g(x) = -2x^2 + 4x + 6 + 2x - 10 = -2x^2 + 6x - 4$
On doit donc étudier le signe de ce trinôme
…..Ce trinôme admet pour racines $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$
D'où le tableau de signes et de conséquences :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de la différence $f(x) - g(x)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | |
| Conséquences | $\mathscr{C}_f$ en dessous de $\mathscr{C}_g$ | | $\mathscr{C}_f$ au dessus de $\mathscr{C}_g$ | | $\mathscr{C}_f$ en dessous de $\mathscr{C}_g$ |

Intersection intersection

# *Exercices corrigés*

## *Exercice 1*

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$ d'unité 1 cm sur $Ox$ et $0,5$ cm sur $Oy$.

**Partie A : Étude d'une fonction polynôme de degré** $2$

On note $C_f$ la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur $[-3, 4]$ par

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 1$$

1. (a) Déterminer $f'$, la fonction dérivée de $f$.
   (b) Établir le tableau de variation de $f$ sur $[-3; 4]$.
2. Déterminer une équation de $T$, la tangente à la courbe $C_f$ au point d'abscisse $-1$.
3. Tracer la tangente $T$ puis la courbe $C_f$ dans le repère $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$

**Partie B : Étude d'une fonction polynôme de degré** $3$

On considère $C_g$, la courbe représentative de la fonction $g$ définie sur $[-3, 4]$ par

$$g(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x - 1$$

1. (a) Déterminer la fonction dérivée $g'$.
   (b) Étudier le signe de $g'(x)$. En déduire le tableau de variation de $g$ sur $[-3, 4]$.
   (c) Combien l'équation $g(x) = 0$ admet-elle de solution(s) sur $[-3, 4]$ (Justifier).
   On note $\alpha$ la plus grande de ces solutions.
   (d) Déterminer un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-2}$ .
2. Déterminer, par le calcul, les coordonnées des points d'intersection des courbes $C_f$ et $C_g$.
3. Tracer la courbe $C_g$ dans le repère orthogonal $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$.

# Correction de l'exercice 1

### Partie A

1. (a) On trouve $f'(x) = 3x$

   (b) d'où le tableau de variations :

| $x$ | $-3$ | | $0$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Variations de $f$ | $\frac{25}{2}$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $23$ |

2. On a $f(-1) = \frac{1}{2}$ et $f'(-1) = -3$ d'où l'équation de la tangente cherchée est :
   $y = f'(-1)(x+1) + f(-1) = -3(x+1) + \frac{1}{2} = -3x - \frac{5}{2}$

3. Voir graphe

### Partie B

1. (a) Le calcul de la fonction dérivée donne $g'(x) = -3x^2 + 3x + 6$

   (b) Pour déterminer le signe de $g'(x)$, on calcule le discriminant $\Delta$, ici égal à $81$, ce qui nous donne les deux racines $x_1 = 2$ et $x_2 = -1$.
   Or, un polynôme du second degré est du signe de $a$ (ici négatif) sauf entre les racines d'où le tableau de variations de $g$ :

| $x$ | $-3$ | | $-1$ | | $2$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Variations de $g$ | $\frac{43}{2}$ | $\searrow$ | $-\frac{9}{2}$ | $\nearrow$ | $9$ | $\searrow$ | $-17$ |

   (c) $g$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[-3; -1]$ avec $g(-3) > 0$ et $g(-1) < 0$.
   L'équation $g(x) = 0$ admet donc une unique solution sur l'intervalle $[-3; -1]$.
   $g$ est strictement croissante sur l'intervalle $[-1; 2]$ avec $g(-1) < 0$ et $g(2) > 0$.
   L'équation $g(x) = 0$ admet donc une unique solution sur l'intervalle $[-1; 2]$.
   $g$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[2; 4]$ avec $g(2) > 0$ et $g(4) < 0$.
   L'équation $g(x) = 0$ admet donc une unique solution $\alpha$ sur l'intervalle $[2; 4]$.
   Conclusion : L'équation $g(x) = 0$ admet donc trois solutions sur l'intervalle $[-3; 4]$.

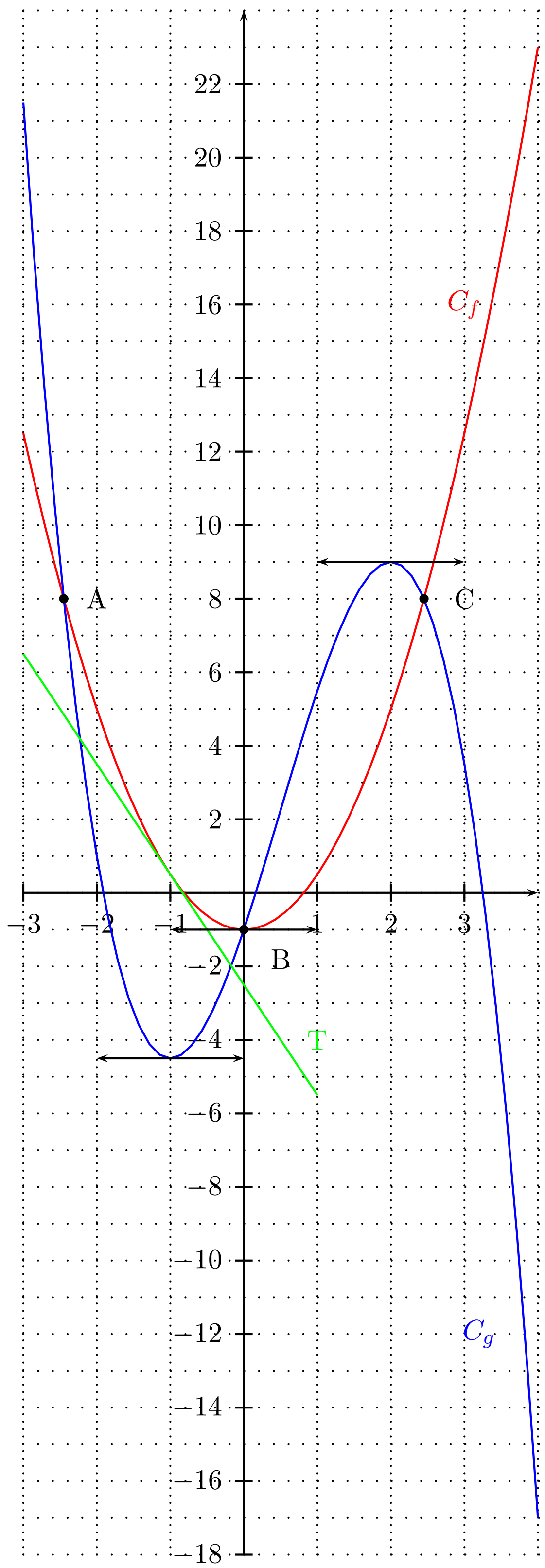
   (d) $\alpha$ appartient à l'intervalle $[2; 4]$, de plus, $g(3) = 3,5$ qui est positif. On fait donc une table de valeurs avec la calculatrice avec des valeurs allant de $3$ à $4$ par pas de $0,1$.
   On trouve $g(3,2) = 0,79 > 0$ et $g(3,3) = -0,80 < 0$ donc : $3,2 < \alpha < 3,3$.
   On réitère le même procédé cette fois-ci sur l'intervalle $[3,2; 3,3]$ par pas de $0,01$.
   On obtient $g(3,25) = 0,02 > 0$ et $g(3,26) = -0,14 < 0$ donc : $3,25 < \alpha < 3,26$.

2. Pour déterminer l'intersection des deux courbes, il faut résoudre le système $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$

   On obtient alors pour $x$ : $\frac{3}{2}x^2 - 1 = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x - 1 \iff -x^3 + 6x = 0 \iff x(-x^2+6) = 0$ d'où les solutions : $x = 0$, $x = \sqrt{6}$ et $x = -\sqrt{6}$

   Les points d'intersection sont donc les points : A $\begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ 8 \end{pmatrix}$, B $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et C $\begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ 8 \end{pmatrix}$.

3.



## Exercice 2.

On considère les fonctions $f$ et $g$ définies par :

- $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{2 - x}$ pour $x \neq 2$.
- $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$.

1. (a) Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (b) Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$ ?
2. Montrer que pour tout $x > 0$ on a :
   $$-\frac{1}{x} \leq g(x) \leq \frac{1}{x}$$
   En déduire la limite de $g$ en $+\infty$.
   Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathscr{C}_g$ en $+\infty$ ?
3. Déterminer, en vous inspirant de la question précédente, la limite de $g$ en $-\infty$ et en déduire l'existence d'une asymptote à $\mathscr{C}_g$ en $-\infty$ que l'on précisera.
4. (a) Etablir le tableau de signe de $2 - x$.
   (b) En déduire les limites de $f$ en $2^+$ puis en $2^-$ ; en déduire l'existence d'asymptote à $\mathscr{C}_f$ que l'on précisera.
5. (a) Pour tout $x \neq 2$ calculer $f'(x)$.
   (b) Etudier le signe de $f'(x)$ en fonction de $x$.
   (c) Dresser le tableau de variation complet de $f$ sur $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.

## Exercice 3

On considère les fonctions $f$ et $g$ définies par :

- $f(x) = \dfrac{-x^2 + x + 1}{x - 1}$ pour $x \neq 1$.
- $g(x) = \dfrac{\cos x + 1}{x}$ pour $x \neq 0$.

1. (a) Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (b) Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$ ?
2. Montrer que pour tout $x > 0$ on a :
   $$0 \leq g(x) \leq \frac{2}{x}$$
   En déduire la limite de $g$ en $+\infty$.
   Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathscr{C}_g$ en $+\infty$ ?
3. Déterminer, en vous inspirant de la question précédente, la limite de $g$ en $-\infty$ et en déduire l'existence d'une asymptote à $\mathscr{C}_g$ en $-\infty$ que l'on précisera.
4. (a) Etablir le tableau de signe de $x - 1$.
   (b) En déduire les limites de $f$ en $1^+$ puis en $1^-$ ; en déduire l'existence d'asymptote à $\mathscr{C}_f$ que l'on précisera.
5. (a) Pour tout $x \neq 1$ calculer $f'(x)$.
   (b) Etudier le signe de $f'(x)$ en fonction de $x$.
   (c) Dresser le tableau de variation complet de $f$ sur $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.

## *Solution de l'exercice 2*

On considère les fonctions $f$ et $g$ définies par :

– $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{2 - x}$ pour $x \neq 2$. – $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$.

1. (a) Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
   On transforme l'expression $f(x)$ (because FI) :
   Pour tout $x \neq 0$ :
   $$f(x) = \frac{x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x\left(\frac{2}{x} - 1\right)} = x\frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x} - 1}$$
   On a :
   $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x} - 1} = \frac{1}{-1} = -1$$
   Et $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc par produit on obtient :
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$
   De même comme $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ on a par produit :
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$
   (b) Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$ ?
   Les limites en $\pm\infty$ de $f$ valent $\pm\infty$ on ne peut donc pas en déduire l'existence d'asymptote horizontale.
2. Montrer que pour tout $x > 0$ on a :
   $$-\frac{1}{x} \leq g(x) \leq \frac{1}{x}$$
   $$\forall x > 0, \qquad -1 \leq \sin x \leq 1 \Longleftrightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$
   En déduire la limite de $g$ en $+\infty$.
   On a $\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$ donc d'après le théorème des gendarmes on a :
   $$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$
   Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathscr{C}_g$ en $+\infty$ ?
   Du résultat précédent on déduit que $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.
3. Déterminer, en vous inspirant de la question précédente, la limite de $g$ en $-\infty$ et en déduire l'existence d'une asymptote à $\mathscr{C}_g$ en $-\infty$ que l'on précisera.
   On refait la même chose mais pour $x < 0$, ce qui donne :
   $$\forall x < 0, \qquad -1 \leq \sin x \leq 1 \Longleftrightarrow -\frac{1}{x} \geq \frac{\sin x}{x} \geq \frac{1}{x}$$
   On a $\lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{x} = 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$ donc d'après le théorème des gendarmes on a :
   $$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$$
   On en déduit que $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.
4. (a) Etablir le tableau de signe de $2 - x$.

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2-x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

(b) En déduire les limites de $f$ en $2^+$ puis en $2^-$ ; en déduire l'existence d'asymptote à $\mathscr{C}_f$ que l'on précisera.
D'après le tableau de signe précédent lorsque $x > 2$ on a $2-x < 0$ par conséquent :

$$\lim_{x\to 2^+} 2-x = 0^-$$

De plus $\lim\limits_{x\to 2^+} x^2 - x + 1 = 4-2+1 = 3$, par quotient on obtient alors :

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$$

De même, lorsque $x < 2$ on a $2-x > 0$ donc :

$$\lim_{x\to 2^-} 2-x = 0^+$$

De plus $\lim\limits_{x\to 2^-} x^2 - x + 1 = 4-2+1 = 3$, par quotient on obtient alors :

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$$

On en déduit l'existence d'une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

5. (a) Pour tout $x \neq 2$ calculer $f'(x)$.
Pour tout $x \neq 2$ $f$ est dérivable et on a :

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(2-x)-(-1)\times(x^2-x+1)}{(2-x)^2} = \frac{4x-2x^2-2+x+x^2-x+1}{(2-x)^2} = \frac{-x^2+4x-1}{(2-x)^2}$$

(b) Etudier le signe de $f'(x)$ en fonction de $x$.
Pour tout $x \neq 2$, $(2-x)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x^2+4x-1$, polynôme dont nous allons dresser le tableau de signe.
$\Delta = 16-4 = 12$, ce polynôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-4+\sqrt{12}}{-2} = 2-\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad x_2 = 2+\sqrt{3}$$

On obtient alors le tableau de signe de $f'$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $2-\sqrt{3}$ | | $2$ | | $2+\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

(c) Dresser le tableau de variation complet de $f$ sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$.
On déduit du tableau de signe de la dérivée :

| $x$ | $-\infty$ | | $2-\sqrt{3}$ | | $2$ | | $2+\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $f(2-\sqrt{3})$ | ↗ | $\|$ | ↗ | $f(2+\sqrt{3})$ | ↘ | $-\infty$ |

# Solution de l'exercice 3

On considère les fonctions $f$ et $g$ définies par :

– $f(x) = \dfrac{-x^2+x+1}{x-1}$ pour $x \neq 1$.

– $g(x) = \dfrac{\cos x + 1}{x}$ pour $x \neq 0$.

1. (a) Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
   On transforme l'expression $f(x)$ (because FI) :
   Pour tout $x \neq 0$ :
$$f(x) = \frac{x^2\left(-1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = x\frac{-1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}$$
   On a :
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{-1}{1} = -1$$
   Et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc par produit on obtient :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$
   De même comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ on a par produit :
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$
   (b) Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$ ?
   Les limites en $\pm\infty$ de $f$ valent $\pm\infty$ on ne peut donc pas en déduire l'existence d'asymptote horizontale.
2. Montrer que pour tout $x > 0$ on a :
$$0 \leq g(x) \leq \frac{2}{x}$$
$$\forall x > 0, \qquad -1 \leq \cos x \leq 1 \Longleftrightarrow 0 \leq \cos x + 1 \leq 2 \Longleftrightarrow 0 \leq \frac{\cos x + 1}{x} \leq \frac{2}{x}$$
   En déduire la limite de $g$ en $+\infty$.
   On a $\lim\limits_{x\to+\infty} 0 = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x}$ donc d'après le théorème des gendarmes on a :
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$
   Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathscr{C}_g$ en $+\infty$ ?
   Du résultat précédent on déduit que $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.
3. Déterminer, en vous inspirant de la question précédente, la limite de $g$ en $-\infty$ et en déduire l'existence d'une asymptote à $\mathscr{C}_g$ en $-\infty$ que l'on précisera.
   On refait la même chose mais pour $x < 0$, ce qui donne :
$$\forall x < 0, \qquad -1 \leq \cos x \leq 1 \Longleftrightarrow 0 \leq \cos x + 1 \leq 2 \Longleftrightarrow 0 \geq \frac{\cos x + 1}{x} \geq \frac{2}{x}$$
   On a $\lim\limits_{x\to-\infty} 0 = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x}$ donc d'après le théorème des gendarmes on a :
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$$
   On en déduit que $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.
4. (a) Etablir le tableau de signe de $x - 1$.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

(b) En déduire les limites de $f$ en $1^+$ puis en $1^-$ ; en déduire l'existence d'asymptote à $\mathscr{C}_f$ que l'on précisera.

D'après le tableau de signe précédent lorsque $x > 1$ on a $x-1 > 0$ par conséquent :

$$\lim_{x\to 1^+} x-1 = 0^+$$

De plus $\lim\limits_{x\to 1^+} -x^2+x+1 = -1+1+1 = 1$, par quotient on obtient alors :

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

De même, lorsque $x < 1$ on a $x-1 < 0$ donc :

$$\lim_{x\to 1^-} x-1 = 0^-$$

De plus $\lim\limits_{x\to 1^-} -x^2+x+1 = -1+1+1 = 1$, par quotient on obtient alors :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$$

On en déduit l'existence d'une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

5. (a) Pour tout $x \neq 1$ calculer $f'(x)$.

Pour tout $x \neq 1$ $f$ est dérivable et on a :

$$f'(x) = \frac{(-2x+1)(x-1) - 1\times(-x^2+x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2x^2+2x+x-1+x^2-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-x^2+2x-2}{(x-1)^2}$$

(b) Etudier le signe de $f'(x)$ en fonction de $x$.

Pour tout $x \neq 1$, $(x-1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x^2+2x-2$, polynôme dont nous allons dresser le tableau de signe.

$\Delta = 4-8 = -4 < 0$, ce polynôme n'admet pas de racine donc il est de signe constant. Ici on a pour tout $x \neq 1$, $-x^2+x+1 < 0$. On obtient alors le tableau de signe de $f'$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $\|$ | $-$ | |

(c) Dresser le tableau de variation complet de $f$ sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

On déduit du tableau de signe de la dérivée :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $\|$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\|$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

# *Exercice 4*

*f* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

**Etude de la fonction *f***

1) a) Trouver les limites de *f* en + ∞ et en - ∞.
   b) Etudier les variations de *f* et dresser son tableau de variations.
2) a) Trouver une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   b) Etudier la position de T par rapport à $\mathscr{C}$.
3) Tracer T et la courbe $\mathscr{C}$.

## *Solution de l'exercice 4*

**Etude de la fonction f**

1) a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{|x|} - 1 = -2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{|x|} - 1 = 0$

b) $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} - 1$

avec $u(x) = x + 1$ et $v(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

$f'(x) = \dfrac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v^2(x)}$

$u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$$f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - \dfrac{x(x+1)}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} = \dfrac{x^2 + 1 - x(x + 1)}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} = \dfrac{1 - x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

$f'(x)$ est du signe de $1 - x$

Tableau de variations de f :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f' | | + | | – | |
| f($x$) | $-2$ | ↗ | $\sqrt{2} - 1$ | ↘ | 0 |

$f(1) = \dfrac{2}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1$

2) a) Une équation de la tangente T au point d'abscisse 0 est :

$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$

Une équation de T est donc $y = x$.

b) $f(x) - x = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 - x = (x+1)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)$

$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 > 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 1 \rightarrow \frac{1}{x^2+1} > 1 \rightarrow x^2 + 1 < 1 \rightarrow x^2 < 0$

Impossible car un carré est toujours positif.

Donc $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 < 0$ pour tout x réel.

$f(x) - x$ est donc du signe de $-(x + 1)$

Si $x < -1$ alors $f(x) - x > 0$ : la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de T.

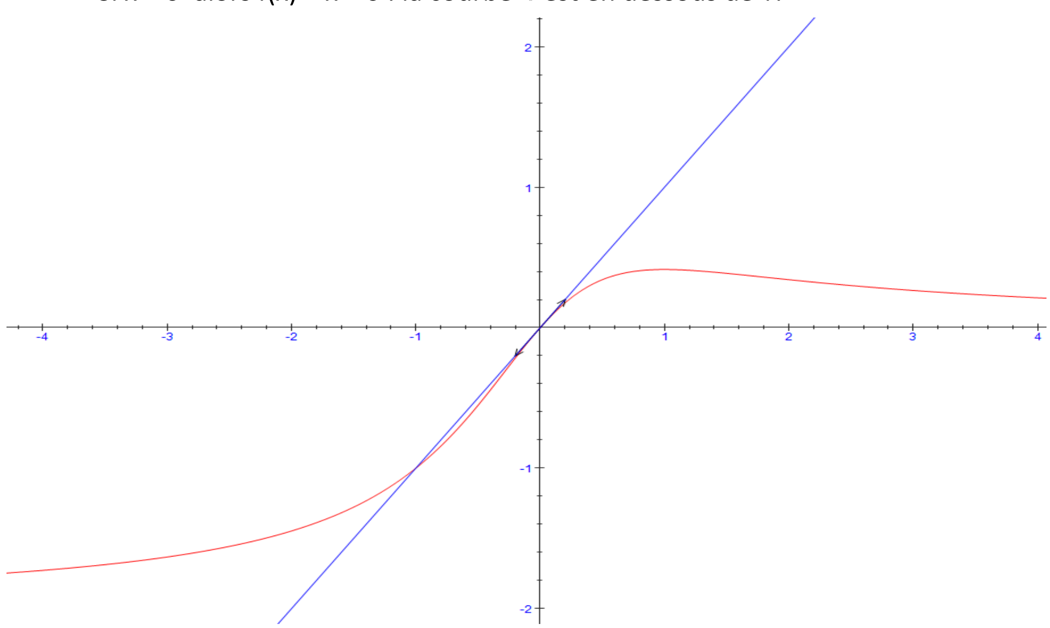
Si $x = -1$ alors $f(x) = x$ : la courbe $\mathscr{C}$ et T se coupent au point (-1 ;-1)

Si $-1 < x < 0$ alors $f(x) - x < 0$ : la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de T.

Si $x = 0$ alors $f(x) = x$ : la courbe $\mathscr{C}$ et T se coupent au point (0 ;0)

Si $x > 0$ alors $f(x) - x < 0$ : la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de T.

3)



## Exercice 5

1. On considère la fonction $g$ définie sur l'intervalle I = $[\,0\,;\,\frac{\pi}{4}\,]$ par $g(x) = tan(x) - x$ .

a) Etudier les variations de la fonction $g$ et en déduire son signe.
b) Montrer que, pour tout $x$ de I, on a $0 \le tan(x) \le 1$.
c) On considère la fonction $h$ définie sur I par $h(x) = tan(x) - 2x$ . Montrer que la dérivée de $h$ peut s'écrire $h'(x) = tan^2(x) - 1$. Etudier les variations de $h$ et en déduire son signe .

2. On considère la fonction $f$ définie sur I par $f(x) = tan(x) - x - \frac{4x^3}{3}$ .

a) Montrer que la dérivée de $f$ peut s'écrire $f'(x) = (tan(x) + 2x)(tan(x) - 2x)$. En déduire le signe de $f'$ .
b) Dresser le tableau de variations de la fonction $f$ et en déduire son signe.
c) Montrer que, pour tout $x$ de I, on a $x \le tan(x) \le x + \frac{4x^3}{3}$.

3. Calculer les deux limites suivantes : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{tan\, x - x}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \left( \frac{tan\, x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \right)$ .

## Solution de l'exercice 5

1. a) La fonction $g$ est dérivable comme somme de fonctions dérivables ; $g'(x) = tan^2(x) + 1 - 1 = tan^2(x)$ est positif ; donc la fonction $g$ est croissante sur I et comme $g(0) = 0$, la fonction $g$ est positive sur I.

b) Pour tout $x$ de I, on a $\frac{\sqrt{2}}{2} \le cos(x) \le 1$ donc $1 \le \frac{1}{cos(x)} \le \sqrt{2}$ et $0 \le sin(x) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $0 \le tan(x) \le 1$.

c) La fonction $h$ est dérivable comme somme de fonctions dérivables ; $h'(x) = tan^2(x) + 1 - 2 = tan^2(x) - 1$ ; d'après la question précédente, $h'(x)$ est négative et donc $h$ est décroissante sur I ; de plus, $h(0) = 0$, donc $h$ est négative sur I.

2. a) La fonction $f$ est dérivable comme somme de fonctions dérivables ; $f'(x) = tan^2(x) + 1 - 1 - 4x^2 = tan^2(x) - 4x^2$ ; donc $f'(x) = (tan(x) + 2x)(tan(x) - 2x)$ ; d'après les questions précédentes, $tan(x) - 2x \le 0$ et $tan(x) + 2x \ge 0$ donc $f'(x)$ est négative et donc $f$ est décroissante sur I ; de plus, $f(0) = 0$, donc $f$ est négative sur I.

b) Le tableau de variations de $f$ : ( Le signe de $f$ sur I : $f(x) \le 0$ )

| $x$ | $0$ | $\pi/4$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ ↘ | $f(\pi/4)$ |

c) Pour tout $x$ de I, on a $g(x) \ge 0$ et $f(x) \le 0$, donc $x \le tan(x) \le x + \frac{4x^3}{3}$.

3. Pour tout $x$ de I, on a $0 \le tan(x) - x \le \frac{4x^3}{3}$ et si $x \ne 0$, $0 \le \frac{tan(x) - x}{x^2} \le \frac{4x}{3}$. Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{4x}{3} = 0$ alors $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{tan\, x - x}{x^2} = 0$ . La fonction tangente est dérivable sur I, donc

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \left( \frac{tan\, x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \right)$ est le nombre dérivé de $tan(x)$ en $\frac{\pi}{4}$, car $tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ ; donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \left( \frac{tan\, x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \right) = tan'(\frac{\pi}{4}) = tan^2(\frac{\pi}{4}) + 1 = 2$ .

## *Exercice 6*

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \cos^2(x)$ et C sa courbe représentative.

1. a) Démontrer que pour tout réel $x$, $x \leqslant f(x) \leqslant x + 1$.

b) En déduire les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$ .
c) Interpréter graphiquement l'encadrement précédent.
2. On note $(d_1)$ et $(d_2)$ les droites d'équation $y = x$ et $y = x + 1$.
Déterminer les points d'intersection de la courbe C avec la droite $(d_1)$, puis avec la droite $(d_2)$ .
3. a) Déterminer la fonction dérivée $f'$ de $f$. Montrer que pour tout réel $x$, $f'(x) = 1 - \sin(2x)$.
b) En déduire le sens de variations de la fonction $f$.
c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$.
4. a) Dresser le tableau de variations de $f$ sur $[0; \pi]$.
b) Tracer $(d_1)$, $(d_2)$ et la représentation graphique de $f$ sur $[0; \pi]$.
5. a) Démontrer que pour tout réel $x$, $f(x + \pi) = f(x) + \pi$ .
b) Comment déduit-on la courbe C de la représentation graphique de $f$ sur $[0; \pi]$ ?

## *Solution de l'exercice 6*

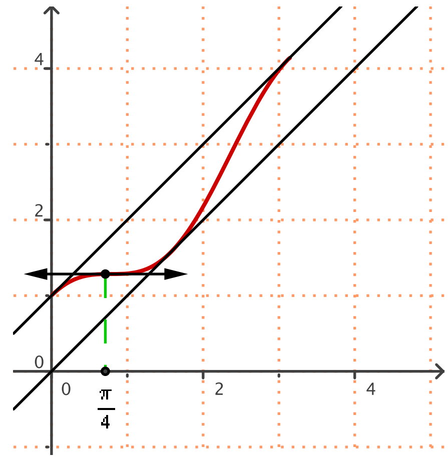
On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \cos^2(x)$ et C sa courbe représentative.
1. a) Pour tout réel $x$, on sait que $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$, donc $0 \leqslant \cos^2(x) \leqslant 1$, et $x \leqslant f(x) \leqslant x + 1$.
b) On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x = \lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$ , donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} x = \lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty$ , donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
c) L'encadrement précédent permet d'affirmer que la courbe C est située entre la droite d'équation $y = x$ et la droite d'équation $y = x + 1$.
2. Les abscisses des points d'intersection de la courbe C avec la droite $(d_1)$ sont les solutions de l'équation : $f(x) = x$, qui équivaut à $\cos^2(x) = 0$, soit $\cos(x) = 0$. Les solutions de cette équation sont les nombres $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Les ordonnées respectives sont $\frac{\pi}{2} + k\pi$ .
Les abscisses des points d'intersection de la courbe C avec la droite $(d_2)$ sont les solutions de l'équation : $f(x) = x + 1$, qui équivaut à $\cos^2(x) = 1$, soit $\cos(x) = 1$ ou $\cos(x) = -1$. Les solutions de ces équations sont les nombres $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Les ordonnées respectives sont $k\pi + 1$.
3. a) La fonction $f$ est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. La dérivée de $\cos x$ est $-\sin x$, et la dérivée de $u^2$ est $2uu'$. D'où, pour tout réel $x$, $f'(x) = 1 - 2\sin(x)\cos(x) = 1 - \sin(2x)$.
b) On sait que, pour tout réel $x$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, donc $-1 \leqslant -\sin(2x) \leqslant 1$, et $0 \leqslant f'(x) \leqslant 2$ . Donc la dérivée est positive et la fonction $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

c) L'équation $f'(x) = 0$ équivaut à $\sin(2x) = 1$, équivaut à $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ équivaut à $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

4. a) Le tableau de variations de $f$ sur $[0; \pi]$:

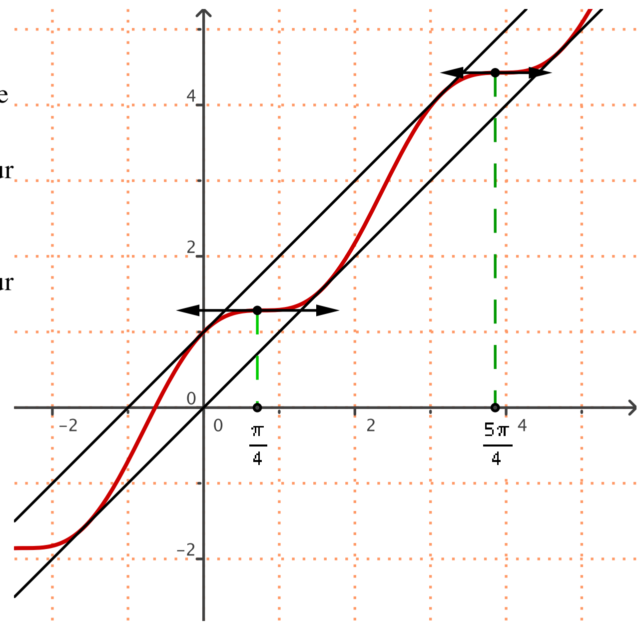
| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $1$ | $\nearrow$ | $\pi + 1$ |

b) Représentation graphique de $f$ sur $[0; \pi]$:




5. a) Pour tout réel $x$, on a $f(x + \pi) = x + \pi + \cos^2(x+ \pi) = x + \pi + \cos^2(x)$ car $\cos(x+ \pi) = -\cos(x)$, donc $f(x + \pi) = f(x) + \pi$ .

b) Pour $x \in [0; \pi]$, soit $M(x; y)$ un point de la courbe C.
Comme $f(x + \pi) = f(x) + \pi$ , le point de la courbe d'abscisse $(x + \pi)$ a pour ordonnée $f(x + \pi) = f(x) + \pi = y + \pi$.
On déduit la courbe C de la représentation graphique de $f$ sur $[\pi; 2\pi]$ par une translation de vecteur $\pi \vec{i} + \pi \vec{j} = \pi(\vec{i} + \vec{j})$. Etc...
On déduit la courbe C de la représentation graphique de $f$ sur $\mathbb{R}$ par des translations de vecteur $k\pi \vec{i} + k\pi \vec{j}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.




## Exercice 7

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x$.

1. Préciser l'ensemble de définition $D_f$ de la fonction $f$ .

2. a) Montrer que pour tout réel $x$ de $D_f$ , $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x}$. En déduire la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.

b) Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$.

c) Préciser les éventuelles asymptotes à la courbe $C_f$ .

3. Montrer que la droite d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à la courbe $C_f$.

4. Étude de la dérivabilité de $f$ en $-1$ et en 1:

a) Montrer que $\frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 1$ . En déduire $\lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1}$ . La fonction $f$ est-elle dérivable en $-1$ ?

b) La fonction $f$ est-elle dérivable en 1 ?

5. a) Étudier les variations de la fonction $f$ sur son ensemble de dérivabilité .

b) Dresser le tableau de variations de $f$ sur $D_f$ .

6. Tracer la courbe ainsi que les tangentes aux points d'abscisses $-2$, $-1$, 1 et 2.

## *Solution de l'exercice 7*

1.l'ensemble de définition $D_f$ de la fonction $f$ est l'ensemble des réels $x$ tels que $x^2 - 1 \geqslant 0$. Soit $x^2 \geqslant 1$, soit $x \in ]-\infty ; -1] \cup [1; +\infty[$. Donc $D_f = ]-\infty ; -1] \cup [1; +\infty[$.

2. a) Pour tout réel $x$ de $D_f$, $f(x) = \sqrt{x^2-1} - x = \dfrac{(x^2-1)-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x} = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$ en utilisant l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1} = \lim\limits_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

c) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, la courbe $C_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) en $+\infty$.

3. Pour montrer que la droite d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à $C_f$, on étudie $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(-2x)) = \lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-1}+x)$. On peut écrire $\sqrt{x^2-1}+x = \dfrac{(x^2-1)-x^2}{\sqrt{x^2-1}-x} = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x} = \dfrac{-1}{f(x)}$ et comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(-2x)) = 0$. Donc la droite d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à la courbe $C_f$ en $-\infty$.

4. Étude de la dérivabilité de $f$ en $-1$ et en $1$:

a) Pour $x < -1$: $x - 1 < 0$, d'où $-x + 1 > 0$ et $-x - 1 > 0$. Ainsi $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \dfrac{\sqrt{x^2-1}-x-1}{x+1} = \dfrac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{\sqrt{(x+1)^2}} - 1 = \dfrac{\sqrt{(-x+1)(-x-1)}}{\sqrt{(-x-1)^2}} - 1 = \sqrt{\dfrac{-x+1}{-x-1}} - 1 = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} - 1$. D'où $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1}\left(\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}-1\right) = +\infty$, car $\lim\limits_{x\to-1}(x-1) = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}(x+1) = 0^-$ et $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x-1}{x+1} = +\infty$. La fonction $f$ n'est pas dérivable en $-1$.

b) Pour $x > 1$: $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{\sqrt{x^2-1}-x+1}{x-1} = \dfrac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{\sqrt{(x-1)^2}} - 1 = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} - 1$.

D'où $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-1\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{x-1} = +\infty$. La fonction $f$ n'est pas dérivable en 1.

5. a) La fonction $f$ est dérivable sur $]-\infty ; -1[ \cup ]1; +\infty[$ comme somme et composée de fonctions qui le sont.

D'où $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} - 1 = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} - 1 = \dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$. Le signe de $f'(x)$ est le signe du numérateur:

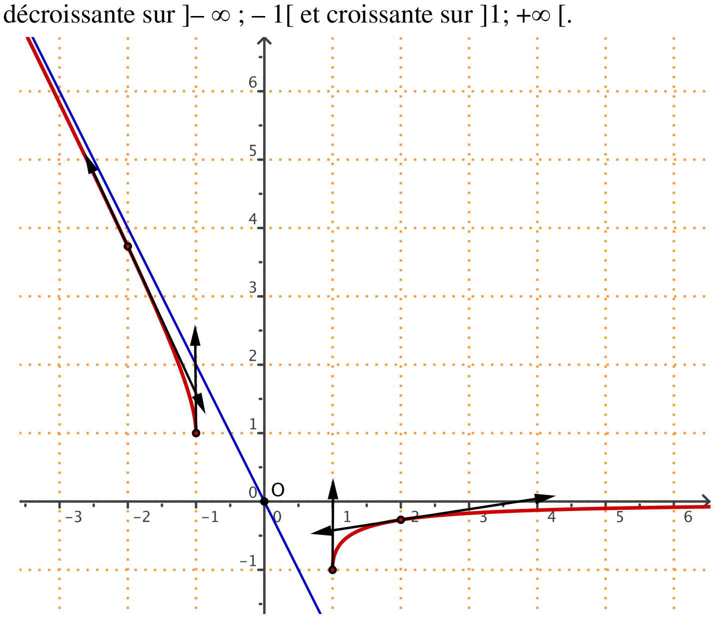
Si $x < -1$, $x$ et $-\sqrt{x^2-1}$ sont négatifs, donc $f'(x) \leqslant 0$.

Si $x > 1$, on a $0 \leqslant x^2 - 1 \leqslant x^2$, donc $\sqrt{x^2-1} \leqslant x$ par la croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$; et $x - \sqrt{x^2-1} \geqslant 0$, donc $f'(x) \geqslant 0$. La fonction $f$ est décroissante sur $]-\infty ; -1[$ et croissante sur $]1; +\infty[$.

b) Le tableau de variations de $f$ sur $D_f$:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | \|\| | Non définie | \|\| | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $1$ | Non définie | $-1$ | ↗ | $0$ |

6. La courbe ainsi que les tangentes aux points d'abscisses $-2$, $-1$, $1$ et $2$:



# Exercice 8

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 1$ .

1. Montrer que l'ensemble de définition de la fonction $f$ est $D_f = \mathbb{R}$ .
2. Étudier la parité de la fonction $f$ .
3. Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. a) Montrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à la courbe C représentative de la fonction $f$.

b) En utilisant la question 2, déterminer une autre asymptote oblique à C.

5. Étudier les variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$ .
6. Dresser le tableau de variations de $f$ sur $D_f$ .
7. Préciser l'équation de la tangente à C au point d'abscisse 1.
8. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

# Solution de l'exercice 8

1. Pour tout réel $x$ , $x^2 + 1$ est strictement positif, donc $\sqrt{x^2+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et donc l'ensemble de définition de la fonction $f$ est $D_f = \mathbb{R}$ .

2. $D_f$ est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout réel $x$, $f(-x) = \sqrt{(-x)^2+1} - 1 = \sqrt{x^2+1} - 1 = f(x)$ . Donc la fonction $f$ est paire.

3. Comme $f$ est paire, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ . On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1) = +\infty$ et que $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X} = +\infty$ , donc en utilisant les limites de fonctions composées, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

4. a) Pour montrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à la courbe C , on étudie la limite:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x-1)) = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}+x) = +\infty$. Donc la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à C en $+\infty$.

b) Par symétrie, la droite d'équation $y = - x - 1$ est asymptote oblique à C en $-\infty$.

5. La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

La dérivée de $\sqrt{u}$ est $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ . D'où la dérivée de $f$ est $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ qui est du signe de $x$ . La fonction $f$ est donc décroissante dur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.

6. Le tableau de variations de $f$ sur $D_f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

7. L'équation de la tangente à C au point d'abscisse 1 est

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - 1) + \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 .$$

8. L'équation $f(x) = 0$ équivaut à $\sqrt{x^2+1} = 1$ , soit $x^2 + 1 = 1$, soit $x^2 = 0$. La seule solution est 0.

## *Exercice 9*

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f$.
2. Déterminer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.
3. a) Montrer que pour $x \in ]-\infty ; 1[$, $\dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1} = -\sqrt{\dfrac{x-3}{x-1}}$ .

b) La fonction $f$ est-elle dérivable en 1 ?

4. Étudier les variations de $f$ sur l'ensemble $]-\infty ; 1[ \cup ]3; +\infty[$.
5. Dresser le tableau de variations de $f$.
6. Montrer que les droites d'équation $y = x - 2$ et $y = -x + 2$ sont asymptotes obliques à la courbe C représentative de $f$.

## *Exercice 10*

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ .

1. Étudier la parité de la fonction $f$.
2. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.
3. On admet que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$.
4. Déduire des questions 1 et 3 que $\lim\limits_{x \to -\infty} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$.
5. Que peut-on déduire des questions 1, 3 et 4 pour la courbe C représentative de la fonction $f$ ?

## *Solution de l'exercice 9*

1. L'ensemble de définition de la fonction $f$ est l'ensemble des réels $x$ tels que $x^2 - 4x + 3 \geqslant 0$.

Le discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$, donc il y a deux racines $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$. Le signe de $x^2 - 4x + 3$ est positif pour les valeurs à l'extérieur des racines; soit $D_f = ]-\infty ; 1] \cup [3; +\infty[$.

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 - 4x + 3 = +\infty$ en utilisant la propriété: la limite d'un polynôme à l'infini est la limite de son terme de plus haut degré. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ , alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. De même, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 4x + 3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) = 0$.

3. a) Pour $x \in ]-\infty ; 1[$, $x - 1 = -\sqrt{(x-1)^2}$ , d'où $\dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1} = \dfrac{\sqrt{(x-1)(x-3)}}{-\sqrt{(x-1)^2}} = -\sqrt{\dfrac{x-3}{x-1}}$ .

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} (x-1) = 0^{-\text{¿}}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} (x-3) = -2$ , donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{x-3}{x-1} = +\infty$ , $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \sqrt{\dfrac{x-3}{x-1}} = +\infty$ , et la fonction $f$ n'est pas dérivable en 1.

4. La fonction $f$ est dérivable sur $]-\infty\,;1[\,\cup\,]3;+\infty[$ comme composée de fonctions qui le sont.

On sait que $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, donc $f'(x) = \dfrac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+3}} = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$ qui est du signe de $x-2$ puisque le dénominateur est strictement positif. Ainsi la fonction $f$ est

Étudier les variations de $f$ sur l'ensemble $]-\infty\,;1[\,\cup\,]3;+\infty[$.

5. Le tableau de variations de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | 1 | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | 0 | 0 | ↗ | $+\infty$ |

6. On a $f(x)-(x-2) = \sqrt{x^2-4x+3}-(x-2) = \dfrac{x^2-4x+3-(x-2)^2}{\sqrt{x^2-4x+3}+(x-2)} = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-4x+3}+(x-2)}$.

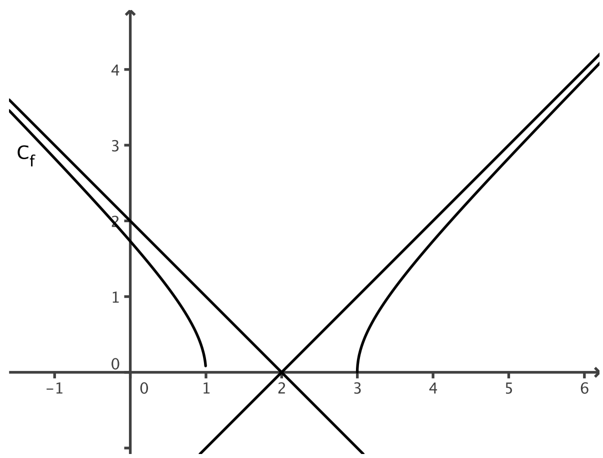
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-4x+3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2) = +\infty$,

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x-2)) = 0$. Ainsi, la droite d'équation $y = x-2$ est asymptote oblique à la courbe C en $+\infty$.

De même, On a $f(x)-(-x+2) = \sqrt{x^2-4x+3}+x-2 = \dfrac{x^2-4x+3-(-x+2)^2}{\sqrt{x^2-4x+3}-x+2} = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-4x+3}-x+2}$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-4x+3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+2) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(-x+2)) = 0$.

Ainsi, la droite d'équation $y = -x+2$ est asymptote oblique à la courbe C en $-\infty$.




## solution de l'exercice 10

1. L'ensemble de définition de $f$ est $\mathbb{R}^*$ qui est centré en 0. De plus, pour tout réel $x$ de $\mathbb{R}^*$, $-x$ appartient $\mathbb{R}^*$ et $f(-x) = -x\sin\left(\dfrac{1}{-x}\right) = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$ car la fonction sinus est impaire. Donc la fonction $f$ est paire.

2. On sait que pour tout réel $x$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$; donc pour tout réel $x \in \mathbb{R}^*$, $-1 \leqslant \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant 1$; et $-x \leqslant x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant x$.

Comme $\lim\limits_{x\to0}(-x) = \lim\limits_{x\to0} x = 0$, par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

3. On admet que $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$. En posant $X = \dfrac{1}{x}$, on a $\dfrac{\sin X}{X} = \dfrac{\sin(1/x)}{1/x} = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} X = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X\to0}\dfrac{\sin X}{X} = 1$.

4. Comme la fonction $f$ est paire et que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$.

5. La courbe C représentative de la fonction $f$ admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie, et admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

## *Exercice 11*

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

1. Déterminer les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition.
2. Etudier les variations de $f$.
3. a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C représentative de la fonction $f$ au point A d'abscisse $a$ différent de $-1$.

b) Déterminer l'abscisse du point B intersection de T et de l'axe des abscisses.

c) Soit H le projeté orthogonal de A sur l'axe des abscisses.

Déterminer l'aire du triangle AHB.

Cette aire dépend-elle de $a$ ?

## *Exercice12*

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

1. Déterminer les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition.
2. Etudier les variations de $f$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.
4. Montrer que la droite (d) d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à la courbe C.
5. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C représentative de la fonction $f$ au point d'abscisse 0.
6. a) Trouver tous les polynômes du second degré dont la courbe représentative admet la droite T comme tangente au point d'abscisse 0.

b) Parmi ces polynômes, en existe-t-il un qui passe par le point A de coordonnées (2; 1) ? Justifier la réponse.

7. Représenter graphiquement à l'aide de Geogebra, la courbe C, la tangente T, la droite (d), le polynôme (s'il existe de la question 6. b).

## *Solution de l'exercice 11*

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

1. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty$ ; On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1) = -\infty$ ;

On a $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} (x+1) = 0^+$ ; On a $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} (x+1) = 0^-$ ;

2. Pour étudier les variations de $f$, on détermine la fonction dérivée : cette fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Et $f'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2} < 0$, donc la fonction $f$ est strictement décroissante sur $]-\infty ; -1[$ et sur $]-1 ; +\infty[$.

3. a) Une équation de la tangente T à la courbe C représentative de la fonction $f$ au point A d'abscisse $a$ différent de $-1$ est de la forme $y = f'(a)(x-a) + f(a) = \dfrac{-1}{(a+1)^2}(x-a) + \dfrac{1}{a+1} = \dfrac{-(x-a)+a+1}{(a+1)^2} = \dfrac{-x+2a+1}{(a+1)^2}$.

b) L''abscisse du point B intersection de T et de l'axe des abscisses vérifie les deux équations

$y = 0$ et $y = \dfrac{-x+2a+1}{(a+1)^2}$ ; soit $-x + 2a + 1 = 0$, d'où $x = 2a + 1$.

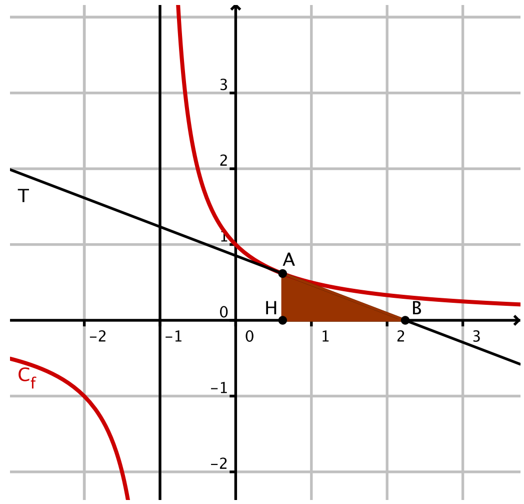
Donc B$(2a + 1; 0)$.

c) Si H le projeté orthogonal de A$(a; f(a))$ sur l'axe des abscisses, alors H$(a; 0)$.

Le triangle AHB est rectangle en H, donc l'aire du triangle

AHB = $\dfrac{\text{HA}\times\text{HB}}{2} = \dfrac{|f(a)|\times|2a+1-a|}{2} = \dfrac{|1/(a+1)|\times|a+1|}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Cette aire est invariante pour tout réel $a$ de $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.




## Solution de l'exercice 12

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

1. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$ ; on obtient une forme indéterminée. Pour lever cette indétermination, on utilise la quantité conjuguée: on multiplie et on divise $f(x)$ par $\sqrt{x^2+1} + x$ :

on obtient $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1}+x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

2. Pour étudier les variations de $f$, on détermine la fonction dérivée : cette fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Et $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$. Le signe de cette dérivée dépend du signe du numérateur : $x - \sqrt{x^2+1}$. Or, pour tout réel $x$, $x^2 < x^2 + 1$, donc $\sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1}$ puisque la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$. Donc $|x| < \sqrt{x^2+1}$, soit $x \leqslant |x| < \sqrt{x^2+1}$, soit $x - \sqrt{x^2+1} < 0$, et la fonction $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. Le tableau de variations de la fonction $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | 0 |

4. Pour montrer que la droite (d) d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à la courbe C, ici en $-\infty$, il faut montrer que la limite $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-(-2x)) = 0$.

Or $f(x) + 2x = \sqrt{x^2+1} + x = \dfrac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x} = \dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$.

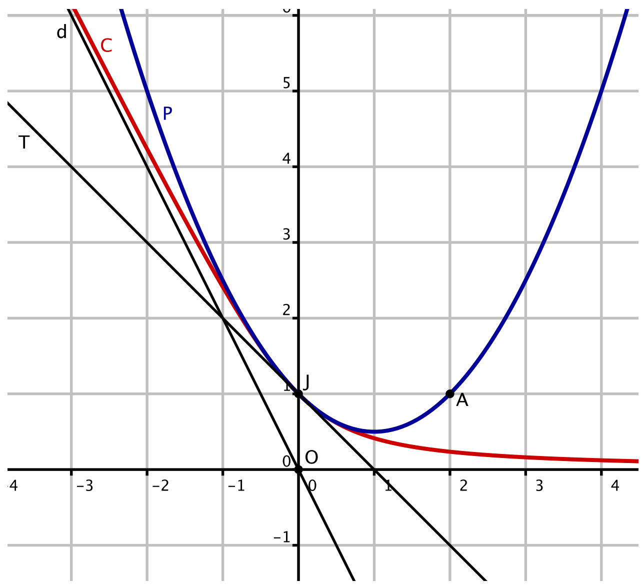
On a vu précédemment que $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+1}-x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = 0$, et la droite (d) d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à la courbe C en $-\infty$.

5.Une équation de la tangente T à la courbe C représentative de la fonction $f$ au point d'abscisse 0 est donnée par $y = f'(0)(x-0) + f(0) = -x + 1$.

6. a) Les polynômes P du second degré dont la courbe représentative admet la droite T comme tangente au point d'abscisse 0 vérifient P(0) = $f(0) = 1$ et P '(0) = $f'(0) = -1$.
Un polynôme du second degré est de la forme $ax^2 + bx + c$. Donc P(0) = $c = 1$ et P '($x$) = $2ax + b$,
soit P '(0) = $b = -1$. Donc P($x$) = $ax^2 - x + 1$.

b) Parmi ces polynômes, l'un passe par le point A de coordonnées (2; 1) si P(2) = 1,
soit P($x$) = $4a - 2 + 1 = 4a - 1 = 1$, soit $a = \dfrac{1}{2}$ .

7. Représentation graphique de la courbe C, la tangente T, la droite (d), le polynôme de la question 6. b).




## *Exercice 13*

On considère la fonction $f$ définie sur ℝ \{2} par $f(x) = \dfrac{2x^2-6}{x-2}$ .

1. Déterminer les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition.
2. Etudier les variations de la fonction $f$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.
4. a) Déterminer des réels $a$, $b$ et $c$ tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$ .

b) Montrer que la droite (d) d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe C.
5. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C représentative de la fonction $f$ au point d'abscisse 0.
6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses.

## *Exercice 14*

1. On considère la fonction $f$ définie sur ℝ par $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ .
Montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe C représentative de la fonction $f$ .

2. On considère la fonction $f$ définie sur $ℝ^+$ \{1} par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ .
Déterminer les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition.

## *Solution de l'exercice 13*

1. On utilise la propriété : la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ d'une fonction rationnelle est la limite du quotient des termes de plus haut degré. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-6}{x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$.

Et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2-6}{x-2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$.

On a $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} (2x^2-6) = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} (x-2) = 0^+$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \dfrac{2x^2-6}{x-2} = +\infty$ par quotient de limites.

On a $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} (2x^2-6) = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} (x-2) = 0^-$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \dfrac{2x^2-6}{x-2} = -\infty$ par quotient de limites.

2. Pour étudier les variations de la fonction $f$, on détermine la fonction dérivée de $f$ :

$f'(x) = \dfrac{4x(x-2)-(2x^2-6)\times1}{(x-2)^2} = \dfrac{2x^2-8x+6}{(x-2)^2}$.

Le dénominateur est strictement positif, donc le signe de $f'(x)$ est le signe du numérateur: on calcule le discriminant : $\Delta = 8^2 - 4\times2\times6 = 16 > 0$. Il y a deux racines $x_1 = \dfrac{8-\sqrt{16}}{2\times2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{8+\sqrt{16}}{2\times2} = 3$. Ce numérateur est du signe de $a = 2 > 0$ pour les valeurs extérieures aux racines.

3. Le tableau de variations de la fonction $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $-\infty$ $\Vert$ $+\infty$ | $\searrow$ | $12$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

4. a) On a $ax + b + \dfrac{c}{x-2} = \dfrac{(ax+b)(x-2)+c}{x-2} = \dfrac{ax^2+(b-2a)x-2b+c}{x-2} = \dfrac{2x^2-6}{x-2}$. Par identification, on trouve $a = 1$ , $b - 2a = 0$ et $-2b + c = -6$; et on trouve $a = 2$, $b = 4$ et $c = 2$.

Donc, pour tout réel $x$ de $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $f(x) = 2x + 4 + \dfrac{2}{x-2}$.

b) Pour montrer que la droite (d) d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe C en $+\infty$, on montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-(ax+b)) = 0$ : On a $f(x) - (2x + 4) = \dfrac{2}{x-2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x-2} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-(2x+4)) = 0$. On montre de même que la droite est asymptote oblique à la courbe C en $-\infty$.

5. Une équation de la tangente T à la courbe C représentative de la fonction $f$ au point d'abscisse 0 est donnée par $y = f'(0)(x-0) + f(0) = \dfrac{3}{2}x + 3$.

6. Pour déterminer les coordonnées des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses, on résout l'équation : $f(x) = 0$, soit $2x^2 - 6 = 0$ équivaut à $2(x^2 - 3) = 0$ équivaut à $x^2 - 3 = 0$ équivaut à $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.
Donc les coordonnées des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses sont ( $\sqrt{3}$ ; 0) et ($-\sqrt{3}$ ; 0).

## *Solution de l'exercice 14*

1. On considère la fonction $f$ définie sur $\boldsymbol{R}$ par $f(x) = x+\sqrt{x^2+1}$.

Pour montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe C représentative de la fonction $f$ en $+\infty$, on détermine $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)$. On a $f(x) - 2x = \sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1} = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}+x) = +\infty$ par somme de limites, et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x) = 0$.

Donc, la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe C représentative de la fonction $f$ en $+\infty$.

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-2x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) = +\infty$, donc la droite d'équation $y = 2x$ n'est pas asymptote à C en $-\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = 1$ (il suffit de calculer $f(0)$).

Pour tout réel $x$ de $\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$, $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \dfrac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$.

Ainsi $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{2}$, et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = 0$.

## *Exercice 15*

On considère la courbe C d'équation $y = 1 - x^2$ et le point M de la courbe C d'abscisse $x$.

PARTIE A

Pour tout réel $x$, on note $f(x)$ la distance OM.

1. Expliciter la fonction $f$ et préciser son ensemble de définition.
2. Étudier la parité de la fonction $f$.
3. Déterminer les limites de la fonction $f$ aux bornes de son ensemble de définition.
4. Étudier les variations de $f$.
5. Préciser les extremums de la fonction $f$ et en quelles valeurs de $x$ ils sont atteints.
6. Faire la représentation graphique de C et la position de M correspondants aux extremums de la fonction $f$.

PARTIE B

Pour tout réel $x$, on note $g(x)$ le coefficient directeur ( lorsqu'il existe) de la droite (OM).

1. Expliciter la fonction $g$ et préciser son ensemble de définition.
2. Étudier la parité de la fonction $g$.
3. Déterminer les limites de la fonction $g$ aux bornes de son ensemble de définition. Que peut-on en déduire pour la courbe $\Gamma$ représentative de la fonction $g$ ?
4. Étudier les variations de $g$.
5. Dresser le tableau de variations de la fonction $g$.
6. Montrer que la courbe $\Gamma$ admet une asymptote oblique (d), que l'on précisera.
7. Étudier la position relative de $\Gamma$ et de (d).
8. A l'aide d'un logiciel, faire la représentation graphique de $\Gamma$ et des asymptotes.

Facultatif : Existe-t-il des positions de M telles que la distance OM égale le coefficient directeur de (OM) ?

## *Solution de l'exercice 15*

Dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$ , $\vec{j}$ ) du plan, on considère la courbe C d'équation $y = 1 - x^2$ et le point M de la courbe C d'abscisse $x$.

PARTIE A : Pour tout réel $x$, on note $f(x)$ la distance OM.

1. La distance OM = $\sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = \sqrt{x^2 + (1-x^2)^2} = \sqrt{x^2 + 1 - 2x^2 + x^4} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$ .
Le polynôme $x^4 - x^2 + 1 = X^2 - X + 1$ a un discriminant égal à $-3 < 0$, donc ne s'annule pas et est toujours du signe de $a = 1$, donc strictement positif. Ainsi, l'ensemble de définition de $f$ est $\mathbb{R}$ .
2. Étude de la parité de la fonction $f$ : l'ensemble de définition est centré en 0, et pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ ,
$f(-x) = \sqrt{(-x)^4 - (-x)^2 + 1} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1} = f(x)$ ; donc la fonction $f$ est paire.
3. Les limites de la fonction $f$ : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^4 - x^2 + 1 = +\infty$ car la limite d'un polynôme en l'infini est la limite de son terme de plus haut degré. De plus, $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ , donc par la limite de fonctions composées, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
De même, et par la parité, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
4. Les variations de $f$ : la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables ;
et $f'(x) = \dfrac{4x^3 - 2x}{2\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} = \dfrac{2x^3 - x}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} = \dfrac{x(2x^2 - 1)}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}}$ qui est du signe du numérateur; $2x^2 - 1 = 0$ pour $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $x = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ . D'où le tableau de signes de $f'$ et les variations de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ | | $0$ | | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | | $+$ | | |
| $2x^2 - 1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | ↗ | $1$ | ↘ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | ↗ | $+\infty$ |

5. Le maximum local de $f$ est 1 atteint en $x = 0$ ; le minimum est $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ atteint en $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $x = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ .
6. La représentation graphique de C et la position de M correspondants aux extremums de la fonction $f$ :

PARTIE B :

1. Le coefficient directeur de la droite (OM) est égal à $\dfrac{y_M - y_O}{x_M - x_O} = \dfrac{1 - x^2}{x} = g(x)$ qui est défini sur $\mathbb{R}^*$.
2. Étude de la parité de la fonction $g$ : l'ensemble de définition est centré en 0, et pour tout $x$ de $\mathbb{R}^*$ ,
$g(-x) = \dfrac{1 - (-x)^2}{-x} = \dfrac{1 - x^2}{-x} = -g(x)$ ; donc la fonction $g$ est impaire.
3. La fonction $g$ est une fonction rationnelle, donc la limite en l'infini est la limite du quotient des termes de plus haut degré : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$ . $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$ .
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (1 - x^2) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x = 0^+$ , donc par quotient de limites, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = +\infty$. Par la parité, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} g(x) = -\infty$.
On peut déduire que la courbe $\Gamma$ admet l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.
4. Les variations de $g$ : la fonction $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables ;
et $g'(x) = \dfrac{(-2x)(x) - (1 - x^2)}{x^2} = \dfrac{-x^2 - 1}{x^2}$ qui est du signe du numérateur qui est strictement négatif. Donc, la

fonction $g$ est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

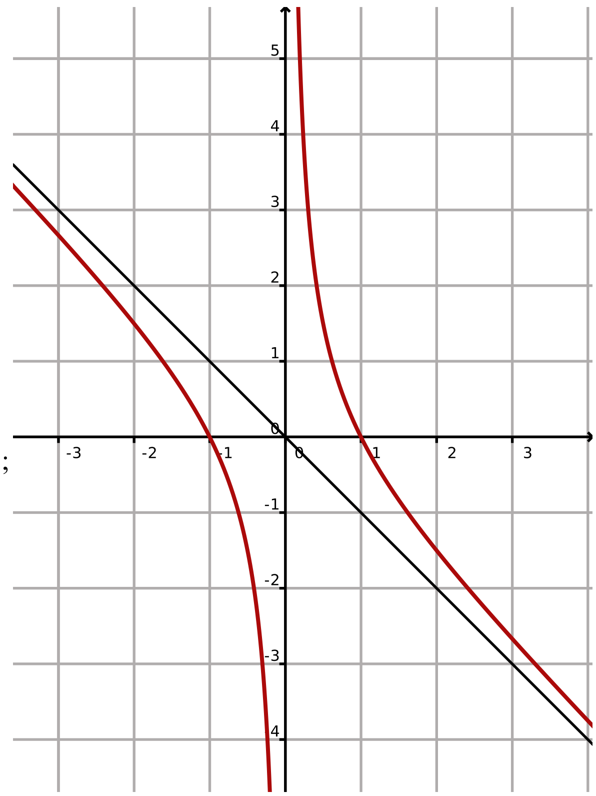
5. Le tableau de variations de la fonction $g$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $\|\|$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\infty$ $\|\|$ $+\infty$ | $\searrow$ | $+\infty$ |

6. Pour tout $x$ de $\mathbb{R}^*$, $g(x) = \dfrac{1-x^2}{x} = \dfrac{1}{x} - x$. Et $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(g(x)-x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x} = 0$, donc la droite d'équation $y = -x$ est asymptote oblique à la courbe $\Gamma$ .

7. Pour étudier la position relative de $\Gamma$ et de (d) on étudie le signe de la différence $g(x) - (-x) = \dfrac{1}{x}$ qui est strictement positif sur $]0\,;+\infty[$ et strictement négatif sur $]-\infty;0[$. Donc la courbe est au-dessus de la droite (d) sur $]0\,;+\infty[$ et est en-dessous de la droite sur $]-\infty;0[$.

8. La représentation graphique de $\Gamma$ et les asymptotes :




BONUS : Pour trouver les positions de M telles que la distance OM égale le coefficient directeur de (OM), il faut résoudre l'équation $f(x) = g(x)$, soit $\sqrt{x^4 - x^2 + 1} = \dfrac{1-x^2}{x}$ ;

on élève au carré : $x^4 - x^2 + 1 = \dfrac{1-2x^2+x^4}{x^2}$, soit

$x^6 - x^4 + x^2 = 1 - 2x^2 + x^4$, soit $x^6 - 2x^4 + 3x^2 - 1 = 0$.

On considère la fonction $h$ définie par

$h(x) = x^6 - 2x^4 + 3x^2 - 1$.

C'est un polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$,

et $h'(x) = 6x^5 - 8x^3 + 6x = 2x(3x^4 - 4x^2 + 3)$.

Le polynôme $3x^4 - 4x^2 + 3 = 3X^2 - 4X + 3$, en posant $X = x^2$ ; le discriminant est égal à $(-4)^2 - 433 = -20 < 0$, donc le polynôme est du signe de $a = 3 > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Donc la dérivée $h'$ est du signe de $x$, et la fonction $h$ est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $]0\,;+\infty[$. Elle atteint un minimum lorsque $x = 0$, qui vaut $h(0) = -1$ ;

de plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^6 = +\infty$ ;

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^6 = +\infty$.

Ainsi, la fonction $h$ s'annule en deux valeurs $x_1 \simeq -0{,}656$ et $x_2 \simeq 0{,}656$.

Donc, il existe deux positions de M telles que la distance OM soit égale au coefficient directeur de (OM).

# Chapitre 12
# Vecteurs de l'espace

## 1 Vecteurs de l'Espace

### 1.1 Extension de la notion de vecteur à l'Espace

Dans le plan, un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par :

- sa direction (la droite $(AB)$) ;
- son sens (du point $A$ vers le point $B$) ;
- sa longueur ou norme (la distance $AB$).

Cette notion se généralise sans problème à l'Espace, avec les mêmes propriétés. Par exemple :

**Propriété :** Égalité de vecteurs
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

### 1.2 Calcul vectoriel dans l'Espace

L'addition de deux vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un réel sont définies comme dans le plan et ont les mêmes propriétés. Par exemple :

**Propriété 1 :** Relation de Chasles
Pour tous points $A$, $B$ et $C$ de l'Espace : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (voir figure 1).

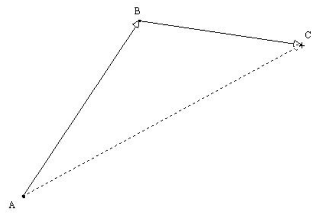
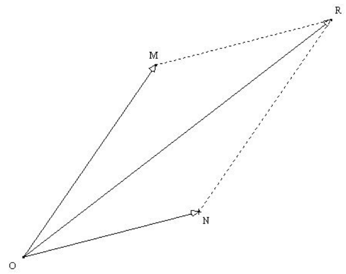



FIG. 1 – Relation de Chasles

**Propriété 2 :** Règle du parallélogramme
$OMRN$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ (voir figure 2)

**Remarques :**

1. Ces deux propriétés donnent les deux manières de construire une somme vectorielle (« bout-à-bout » ou à l'aide d'un parallélogramme).
2. Les règles de calculs sur les sommes de vecteurs et sur les multiplications de vecteurs par un réel sont les mêmes que sur les nombres.




## 1.3 Colinéarité, applications

**Définition :** Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si l'un est le produit de l'autre par un réel $k$ (c'est-à-dire $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$).

**Propriété :** Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont même direction.

**Applications :**
- Les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
- Les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

**Exercice :**
Soit $ABCD$ un tétraèdre et $K$, $L$ et $M$ les points de l'Espace définis par :

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \qquad \overrightarrow{AL} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AD} \qquad \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

1. Faire une figure.
2. Sur quelle face du tétraèdre se situe le point $K$ ? le point $L$ ?
3. (a) Montrer que les droites $(KL)$ et $(BD)$ sont parallèles.
   (b) Montrer que $K$, $M$ et $B$ sont alignés.
   (c) Montrer que $L$, $M$ et $D$ sont alignés.
   (d) Que peut-on en déduire pour les points $M$, $K$, $L$, $B$ et $D$ ?

## 1.4 Coplanarité

**Définitions :**
1. On dit que quatre points $A$, $B$, $C$ et $D$ de l'espace sont **coplanaires** s'ils sont dans un même plan.
2. Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace.
   Il existe quatre points $A$, $B$, $C$ et $D$ de l'espace tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$.
   On dit que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont **coplanaires** si et seulement si les quatre points $A$, $B$, $C$ et $D$ le sont.

**Remarque :** Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, les droites $(AB)$et $(CD)$ sont parallèles et, donc, les points $A$, $B$, $C$ et $D$ sont coplanaires.

**Théorème :** (admis)

1. Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace, tels que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne soient pas colinéaires.
   Alors, les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels $a$ et $b$ tels que :
   $$\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$$
2. Soit $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points de l'espace, tels que $A$, $B$ et $C$ ne soient pas alignés.
   Alors, les points $A$, $B$, $C$ et $D$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels $a$ et $b$ tels que :
   $$\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD}$$

# Chapitre 13

# Droites et plans dans l'éspace

## I ) Repérage dans l'Espace

### 1) Définition – Coordonnées

**Définition :** On appelle **repère de l'Espace** tout quadruplet $\left(O\,;\,\overrightarrow{\imath}\,;\,\overrightarrow{\jmath}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$ où $O$ est un point de l'Espace et où $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires.
Si les vecteurs $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{k}$ sont deux à deux orthogonaux, le repère est dit **orthogonal**.
Si, de plus, les vecteurs sont unitaires ($\|\overrightarrow{\imath}\| = \|\overrightarrow{\jmath}\| = \left\|\overrightarrow{k}\right\| = 1$), on dit que le repère est **orthonormal**.

**Exemples :**

1. Dans le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1(voir figure 3), le quadruplet $\left(D\,;\,\overrightarrow{DA}\,;\,\overrightarrow{DC}\,;\,\overrightarrow{DH}\right)$ forme un repère orthonormé.

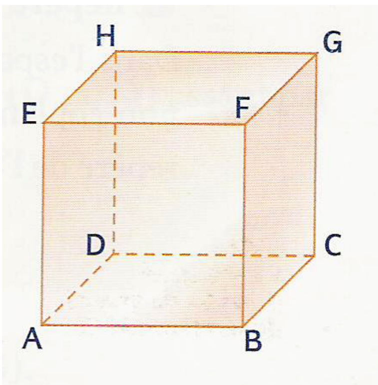



FIG. 3 – Un cube

2. Dans un tétraèdre $ABCD$ (voir figure4), le quadruplet $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AD}\right)$ est un repère (quelconque).

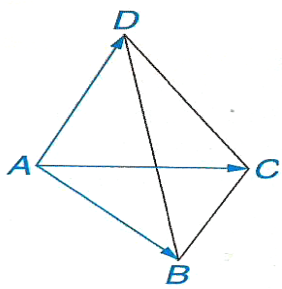



FIG. 4 – Un tétraèdre

**Théorème :** (admis)

Soit $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\right)$ un repère de l'Espace.

1. Soit $M$ un point de l'Espace.
   Il existe un unique triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ (voir figure 5).
   Ce triplet est appelé **coordonnées** de $M$. On note $M\ (x\,;\,y\,;\,z)$.
2. Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'Espace.
   Il existe un unique triplet $(a\,;\,b\,;\,c)$ tel que $\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$.
   Ce triplet est appelé **coordonnées** de $\vec{u}$. On note $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

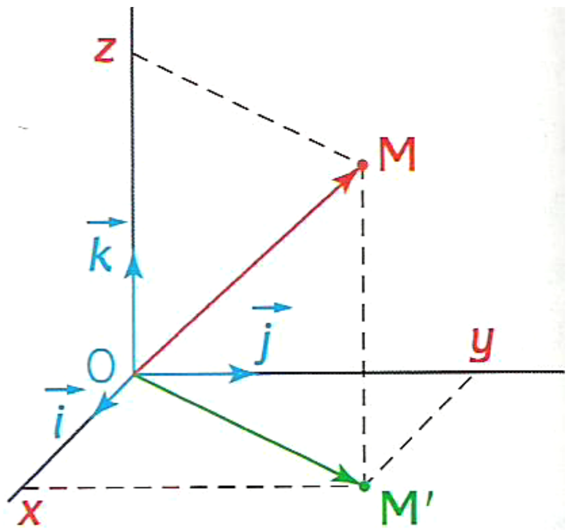



FIG. 5 – Coordonnées dans un repère de l'Espace

**Remarque :** $x$ est appelé abscisse, $y$ est appelé ordonnée et $z$ est appelé cote.

## 2 ) Calcul sur les coordonnées

Les résultats sont identiques à ceux du plan.
On a, par exemple :

- Si $A\ (x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et si $B\ (x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$ alors :
  - les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$
  - les coordonnées du milieu $I$ du segment $[AB]$ sont : $I\ \left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\,\frac{y_A+y_B}{2}\,;\,\frac{z_A+z_B}{2}\right)$
- Si $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et si $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ alors :
  - les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ sont : $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \\ c + c' \end{pmatrix}$
  - Si $k$ est un réel, les coordonnées du vecteur $k\vec{u}$ sont : $k\vec{u}\begin{pmatrix} k \times a \\ k \times b \\ k \times c \end{pmatrix}$

**Exercice :** Soit $A\ (3\,;\,1\,;5)$ et $B\ (0\,;\,5\,;\,4)$ dans le repère $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\right)$.

1. Placer ces points dans le repère.
2. Calculer les coordonnées du milieu $I$ de $[AB]$ et du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. Quelles sont les coordonnées du point $M$ de la droite $(AB)$ dont la cote est 2 ?

## 3) Colinéarité, coplanarité

**Méthode :**

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires si et seulement si il existe un réel $k$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
- Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ (tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires) sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels $a$ et $b$ tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Il s'agit donc, grâce aux coordonnées des vecteurs, de trouver ces réels pour montrer la colinéarité ou la coplanarité.

**Remarque :** Dans l'Espace, il n'existe pas de propriété simple équivalente à celle des « produits en croix » de coordonnées pour des vecteurs colinéaires du plan.

***Definition :*** on appelle **déterminant des vecteurs** $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ le déterminant :

$$\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

Proprieté

- $\vec{w}$ est une **combinaison linéaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ssi $\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right) = 0$
- A, B, C, D coplanaires ssi $\overrightarrow{AD}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ donc ssi $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right) = 0$.

Proprieté

*Soit* $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *un repère de l'espace*

*Deus vecteurs* $\vec{u}(x_u, y_u, z_u)$ *et* $\vec{v}(x_v, y_v, z_v)$ *sont colinéaire si et seulement si*

$$d_y = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = x_u z_v - z_u x_v = 0 \quad et \quad d_y = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = x_u z_v - z_u x_v = 0 \quad et \quad d_z = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = x_u y_v - y_u x_v = 0$$

**Exercice résolu :** Dans un repère $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\right)$ de l'Espace, on considère les points :

$A\ (4\,;0\,;0)$ $\quad B\ (0\,;3\,;0)$ $\quad C\ (0\,;0\,;6)$ $\quad$ et $\quad M\ \left(1\,;\,\frac{3}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right)$

On note $I$ le milieu de $[AC]$ et $L$ le point tel que $3\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{BC}$.

1. Déterminer les coordonnées de $I$ et de $L$.
2. Montrer que les points $A$, $M$ et $L$ sont alignés.
3. Montrer que les points $A$, $B$, $C$ et $M$ sont coplanaires.

**Solution :**

1. $I$ est le milieu de $[AC]$ donc : $I\ \left(\frac{4+0}{2}\,;\,\frac{0+0}{2}\,;\,\frac{0+6}{2}\right)$ soit $\mathbf{I}\ (\mathbf{2}\,;\,\mathbf{0}\,;\,\mathbf{3})$.
   On note $L\ (x_L\,;\,y_L\,;\,z_L)$.
   On a : $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix} x_L-0 \\ y_L-3 \\ z_L-0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6\end{pmatrix}$.
   En coordonnées, l'égalité $3\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{BC}$ devient donc : $\begin{cases} 3x_L & =0 \\ 3\,(y_L-3) & =-3 \\ 3z_L & =6\end{cases}$.
   Donc, après calcul : $\begin{cases} x_L & =0 \\ y_L & =2 \\ z_L & =2\end{cases}$ donc $\mathbf{L}\ (\mathbf{0}\,;\,\mathbf{2}\,;\,\mathbf{2})$.
2. $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} -3 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AL}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2\end{pmatrix}$.
   Les points $A$, $M$ et $L$ sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AL}$ sont colinéaires, c'est-à-dire s'il existe un réel $k$ tel que $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AL}$.
   En coordonnées, on obtient : $\begin{cases} -4k & =-3 \\ 2k & =\frac{3}{2} \\ 2k & =\frac{3}{2}\end{cases}$ soit $\begin{cases} k & =\frac{3}{4} \\ k & =\frac{3}{4} \\ k & =\frac{3}{4}\end{cases}$ donc : $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AL}$.
   Par suite, **les points $A$, $M$ et $L$ sont alignés.**
3. Il faut d'abord montrer que les points $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés.
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6\end{pmatrix}$.
   Les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, c'est-à-dire s'il existe un réel $k$ tel que $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.
   En coordonnées, on obtient : $\begin{cases} -4k & =-4 \\ 0 & =3 \\ 6k & =0\end{cases}$, ce qui est impossible.
   Par suite les points $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés.
   Dans ce cas, les points $A$, $B$, $C$ et $M$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels $a$ et $b$ tels que : $\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$.
   En coordonnées, on obtient : $\begin{cases} -4a-4b & =-3 \\ 3a & =\frac{3}{2} \\ 6b & =\frac{3}{2}\end{cases}$.
   La deuxième équation donne $a=\frac{1}{2}$ et la dernière équation donne $b=\frac{1}{4}$. Reste à vérifier la première équation : $-4\times\frac{1}{2}-4\times\frac{1}{4}=-2-1=-3$.
   Cette équation est vérifiée donc **les points $A$, $B$, $C$ et $M$ sont coplanaires.**

# II) Distance, orthogonalité

## 1) Distance entre deux points dans un repère orthonormé

**Propriété :**

On se place dans un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{\imath}\,;\,\overrightarrow{\jmath}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$ orthonormé.

1. Si le vecteur $\overrightarrow{u}$ a comme coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, alors sa norme est :

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

2. Si $A\,(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et si $B\,(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$ alors :

$$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

**Démonstration** (du 1.)

Soit $M$ le point de l'Espace tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$. On pourra se reporter à la figure 5.

Le repère étant orthonormal, le triangle $OMM'$ est rectangle en $M'$. D'après le théorème de Pythagore, on a : $OM^2 = OM'^2 + MM'^2$.

Or, $\overrightarrow{MM'} = c\,\overrightarrow{k}$ donc $MM'^2 = c^2$.

De plus, le triangle $OPM'$ est rectangle en $P$ , donc : $OM'^2 = OP^2 + PM'^2$.

Or, $\overrightarrow{OP} = a\,\overrightarrow{\imath}$ donc $OP^2 = a^2$ et $\overrightarrow{PM'} = b\,\overrightarrow{\jmath}$ donc $PM'^2 = b^2$.

On obtient donc : $OM^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Donc, $\|\overrightarrow{u}\| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = OM = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

**Remarque :** La deuxième partie de la propriété se prouve en remarquant simplement que $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ et que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \\ z_B-z_A \end{pmatrix}$.

## 2) Relation d'orthogonalité de deux vecteurs

**Propriété (admise) :** On se place dans un repère orthonormé.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux si et seulement si :

$$aa' + bb' + cc' = 0$$

# III ) Représentations paramétriques d'une droite de l'Espace

## 1 ) Définition

On se place dans un repère $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\right)$ de l'Espace.

Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par un point $A\,(x_A\,;\,y_A\,;z_A)$ et de vecteur *directeur* $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$M\,(x\,;\,y\,;\,z)$ est un point de $\mathcal{D}$ si et seulement si il existe un réel $t$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.
En passant aux coordonnées, on obtient :

$$\begin{cases} x - x_A = at \\ y - y_A = bt \\ z - z_A = ct \end{cases} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

**Définition :** On appelle représentation paramétrique ou syst d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$ par un point $A\,(x_A\,;\,y_A\,;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ le système :

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Le réel $t$ est appelé paramètre.

**Remarques :**

1. Un point $M$ est sur $\mathcal{D}$ si et seulement si il existe un réel $t$ tel que les coordonnées de $M$ vérifie le système d'équations paramétriques de $\mathcal{D}$.

2. Réciproquement, si la droite $\Delta$ admet comme équation paramétrique $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}$, cette droite passe par le point $M_0\,(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$ et admet comme vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

3. Pour obtenir une représentation paramétrique du segment $[AB]$, il suffit de prendre comme vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$, comme point de la droite le point $A$ et de prendre $t \in [0\,;\,1]$.

4. Pour obtenir une représentation paramétrique de la demi-droite $[AB)$, il suffit de prendre comme vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$, comme point de la droite le point $A$ et de prendre $t \in [0\,;\,+\infty[$.

# IV ) Equation cartésienne d'un plan

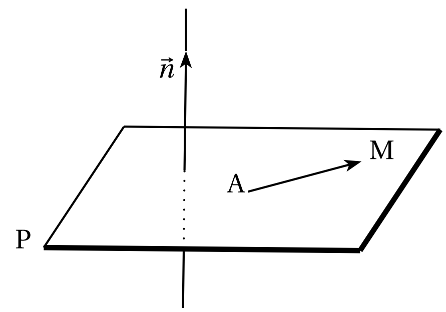
**Définition .**

Un vecteur normal $\vec{n}$ à un plan $P$ est un vecteur non nul dont la direction est orthogonale à $P$.

Soit $A$ un point d'un plan $P$ et $\vec{n}$ un vecteur normal à $P$.
On a, pour tout point $M$ du plan $P$,

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

Réciproquement, si $M$ est un point de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, alors $M \in P$ On a donc le résultat suivant :




**Propriété .** (Caractérisation d'un plan $P$)

Le plan $P$ qui passe par $A$ et qui est orthogonal à $\vec{n}$ est l'ensemble des points $M$ de l'espace tel que :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

***Exercice 1*** :

Dans un repère orthonormal $(O; veci, \vec{j}, \vec{k})$ on donne $A(1;2;3)$ et $\vec{n}(1;-3;1)$. Trouver une équation du plan $P$ qui passe par $A$ et qui est orthogonal à $\vec{n}$.

***Solutions*** :

Soit $M(x;y;z) \in P$ on a alors :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Longleftrightarrow (x-1) - 3(y-2) + (z-3) = 0 \Longleftrightarrow x - 3y + z + 2 = 0$$

$P$ a donc pour équation

$$x - 3y + z + 2 = 0$$

**Théorème**

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, tout plan $P$ admet une équation (dite cartésienne) de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

avec $a$, $b$, $c$ réels non tous nuls et $d$ réel.
De plus le vecteur $\vec{n}(a;b;c)$ est normal à $P$

***Preuve***

Notons $A(x_0; y_0; z_0)$ un point de $P$ et $\vec{n}(a; b; c)$ un vecteur normal à $P$, alors on a :

$$M(x; y; z) \in P \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

i.e

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \Longleftrightarrow ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$$

En posant $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ on obtient le résultat désiré

**Remarques :**

⇝ Notons que l'équation d'un plan n'est pas unique. En effet si $P : x + y + z = 1$ alors $P$ a aussi pour équation $2x + 2y + 2z = 2$.

⇝ Quelques cas particuliers :
Le plan $(Oxy)$ a pour équation $z = 0$, en effet $O(0; 0; 0) \in (Oxy)$ et $\vec{k}(0; 0; 1)$ est normal à ce plan, ainsi :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{k} = 0 \Longleftrightarrow z = 0$$

De la même manière les plans $(Oxz)$ et $(Oyz)$ ont respectivement pour équation $y = 0$ et $x = 0$.
Enfin le plan $P$ passant par les points $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ et $C(0; 0; c)$ a pour équation :

*exercice 2*

On donne les équations cartésiennes de deux plans :

$$P : x - 4y + 7 = 0$$

$$Q : x + 2y - z + 1 = 0$$

1. Montrer que ces plans sont sécants. On note $d$ leur droite d'intersection.
2. Déterminer un vecteur directeur de $d$.

***Solutions*** :

1. Les plans $\mathrm{P}$ et $\mathrm{Q}$ sont soit sécants soit parallèles.
   Le vecteur $\vec{n}(1;-4;0)$ est normal à $\mathrm{P}$ et le vecteur $\vec{n'}(1;2;-1)$ est normal à $\mathrm{Q}$.
   On a $\mathrm{P}//\mathrm{Q} \Longleftrightarrow \vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont deux vecteurs colinéaires. Existe-t-il un réel $k$ tel que :
   $$\vec{n} = k\vec{n'}$$
   Si c'était le cas on aurait $k = 1$ et $2k = -4$, ce qui est absurde, ainsi les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires, par conséquent les plans $\mathrm{P}$ et $\mathrm{Q}$ ne sont pas parallèles, $\mathrm{P}$ et $\mathrm{Q}$ sont donc sécants selon une droite $d$.
2. Si $\mathrm{M}(x;y;z) \in d$, alors $\mathrm{M} \in \mathrm{P} \cap \mathrm{Q}$, par conséquent les coordonnées de $\mathrm{M}$ vérifient le système suivant :
   $$\begin{cases} x - 4y + 7 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$$
   Posons $y = t$, il vient :
   $$\begin{cases} x = 4t - 7 \\ y = t \\ z = 4t - 7 + 2t + 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 4t - 7 \\ y = t \\ z = 6t - 6 \end{cases}$$
   On a pu exprimer les coordonnées d'un tel point $\mathrm{M}$ en fonction d'un paramètre $t$, on dit qu'il s'agit d'une équation paramétrique de la droite $d$.
   Pour $t = 0$, alors $\mathrm{A}(-7;0;-6)$ est un point de la droite $d$. Considérons le vecteur $\vec{u}(4;1;6)$
   Le système ci-dessus se réécrit :
   $$\begin{cases} x + 7 = 4t \\ y - 0 = t \\ z - (-6) = 6t \end{cases} \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}} = t\vec{u}$$
   Ainsi $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$, par conséquent $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $d$.

**Théorème**

Deux plans $\mathrm{P}$ et $\mathrm{Q}$ sont orthogonaux si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.
Deux plans $\mathrm{P}$ et $\mathrm{Q}$ sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

**Corollaire**

Soit deux plans $\mathrm{P}$ et $\mathrm{Q}$ d'équations
$$\mathrm{P} : ax + by + cz + d = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Q} : a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

1. $\mathrm{P}//\mathrm{Q} \Longleftrightarrow (a,b,c)$ et $(a',b',c')$ sont proportionnels.
2. $\mathrm{P} \perp \mathrm{Q} \Longleftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0$.

***Preuve***

1. $P//Q \Longleftrightarrow \vec{n}(a;b;c) = k\vec{n'}(a';b';c')$
2. $P \perp Q \Longleftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n'} \Longleftrightarrow \vec{n}\cdot\vec{n'} = 0 \Longleftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0$

***Exercice 3*** :

Quelle est l'équation générale d'un plan parallèle au plan $(xOy)$ ?

***Solutions*** :

Le plan $(xOy)$ a pour équation $z = 0$ et le plan $P$ cherché a une équation du type :

$$ax + by + cz + d$$

D'après le corollaire précédent on sait que $(a, b, c)$ et $(0, 0, 1)$ sont proportionnels, donc $a = 0$ et $b = 0$, par conséquent le plan $P$ a une équation du type (avec $c \neq 0$) :

$$cz + d = 0 \Longleftrightarrow z = -\frac{d}{c}$$

***Exercice 4*** :

Quelle est l'équation générale d'un plan perpendiculaire au plan $(xOy)$ ?

***Solutions*** :

Soit $P$ un tel plan avec $\vec{n}(a;b;c)$ un vecteur normal, il a donc une équation de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

Mais $(xOy)$ a pour équation $z = 0$ et donc pour vecteur normal $\vec{n'}(0;0;1)$, donc d'après le corollaire on a :

$$\vec{n}\cdot\vec{n'} = 0 \Longleftrightarrow 0a + 0b + c = 0 \Longleftrightarrow c = 0$$

D'où le plan $P$ a une équation de la forme :

$$ax + by + d = 0$$

## *V ) les poisitions relatives de droites et de plans*

## 1) Intersection d'une droite et d'un plan

Considérons un plan P d'équation

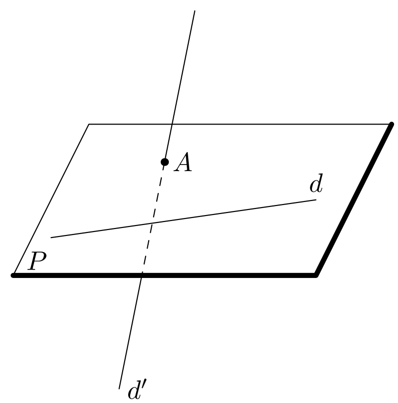
$$ax + by + cz + d = 0$$

et une droite $d$ dont on connaît une représentation paramétrique :

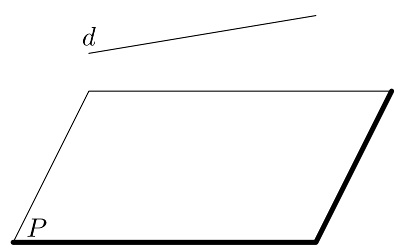
$$\begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \\ z = \gamma t + z_0 \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

Il n'existe que trois possibilités :

1. la droite et le plan n'ont qu'un point commun, la droite et le plan sont dits sécants,




2. la droite est incluse dans le plan,
3. la droite et le plan n'ont aucun point commun.




C'est le premier cas qui nous intéresse, pour cela supposons que le vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ au plan P et le vecteur directeur $\vec{u}(\alpha;\beta;\gamma)$ ne sont pas orthogonaux (comme dans les cas deux et trois), ainsi P et $d$ sont sécants en un point A.
On cherche alors les coordonnées de A en résolvant l'équation suivante (d'inconnue $t$) :

$$a(\alpha t + x_0) + b(\beta t + y_0) + c(\gamma t + z_0) = 0$$

i.e (en factorisant par $t$) :

$$t(a\alpha + b\beta + c\gamma) = -x_0 - y_0 - z_0$$

Comme on a supposé $\vec{n} \cdot \vec{u} \neq 0$, on peut diviser par $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$ et on obtient :

$$t = \frac{-x_0 - y_0 - z_0}{a\alpha + b\beta + c\gamma}$$

Finalement, en remplaçant dans le système de représentation paramétrique de $d$, on trouve les coordonnées de A. Mais obsevons sur un exemple....

**Exercice :**

Soit $\mathrm{P}: 2x - z = 0$ et $d : \begin{cases} x = t-1 \\ y = -3t \\ z = 2 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

Déterminer les coordonnées du point $\mathrm{A} = \mathrm{P} \cap d$.

**Solutions :**

Soit $\vec{n}(2;0;-1)$ un vecteur normal de P et $\vec{u}(1;-3;0)$ un vecteur directeur de $d$, assurons nous que le point A existe :

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 2 \neq 0$$

Par conséquent A existe nous pouvons déterminer ces coordonnées, en résolvant l'équation suivante :

$$2(t-1) - 2 = 0 \Longleftrightarrow 2t - 2 - 2 = 0 \Longleftrightarrow t = 2$$

Ainsi, en remplaçant dans le système paramétrique de $d$ on obtient $\mathrm{A}(2-1; -3 : times2; 2)$ i.e $\mathrm{A}(1; -6; 2)$.

## 2) Intersection de deux droites

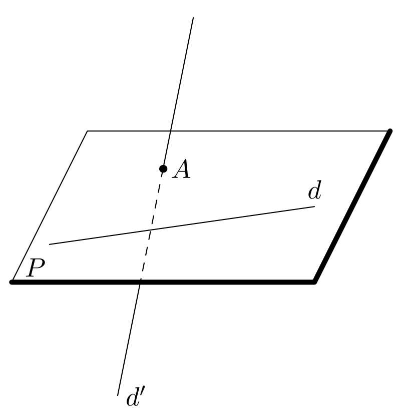
On donne deux droites $d$ et $d'$ dont on connaît les représentations paramétriques :

$$d : \begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \\ z = \gamma t + z_0 \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

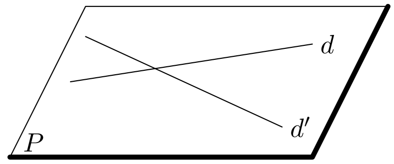
$$d' : \begin{cases} x = \alpha' t' + x_1 \\ y = \beta' t' + y_1 \\ z = \gamma' t' + z_1 \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

$d$ et $d'$ sont deux droites de l'espace. Il n'existe que deux possibilités :

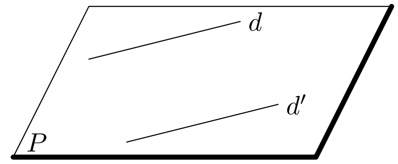
1. il n'existe aucun plan contenant ces deux droites, elles sont dites non coplanaires,




2. il existe un plan contenant ces deux droites, elles sont dites coplanaires (elles sont alors sécantes ou parallèles dans ce plan).




deux droites sécantes




deux droites parallèles

On résout alors le système (qui peut ne pas avoir de solutions) (d'inconnues $t$ et $t'$) :

$$\begin{cases} x = \alpha t + x_0 = \alpha' t' + x_1 \\ \beta t + y_0 = \beta' t' + y_1 \\ \gamma t + z_0 = \gamma' t' + z_1 \end{cases}$$

***Exercice*** :

On donne $A(1;-1;0)$, $B(0;-1;1)$, $C(3;-2;0)$ et $D(2;-3;3)$.
Etudier l'intersection des droites $(AB)$ et $(CD)$.

***Solutions*** :

$\overrightarrow{AB}(-1;0;1)$ est un vecteur directeur de $(AB)$ par conséquent la droite $(AB)$ admet la représentation paramétrique suivante :

$$(AB) : \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = -1 \\ z = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$\overrightarrow{CD}(-1;-1:3)$ est un vecteur directeur de $(CD)$ par conséquent la droite $(CD)$ admet la représentation paramétrique suivante :

$$(CD) : \begin{cases} x = -t' + 3 \\ y = -t' - 2 \\ z = 3t' \end{cases} \qquad t' \in \mathbb{R}$$

On résout le système :

$$\begin{cases} -t + 1 = -t' + 3 \\ -1 = -t' - 2 \\ t = 3t' \end{cases} \iff \begin{cases} -t = -t' + 2 = 1 + 2 = 3 \Rightarrow t = -3 \\ t' = -1 \\ t = 3t' = -3 \end{cases}$$

La troisième équation est compatible avec les deux premières, nous pouvons donc affirmer :

1. le système admet une solution, donc les droites ont une intersection non vide, elles sont coplanaires.
2. Le système admet une unique solution qui est le couple $(t;t') = (-3;-1)$ donc les droites sont sécantes en un point $A$, dont on obtient les coordonnées en remplaçant $t$ ou $t'$ dans l'une des représentations paramétriques de $d$ ou $d'$ :

$$A(4;-1;-3)$$

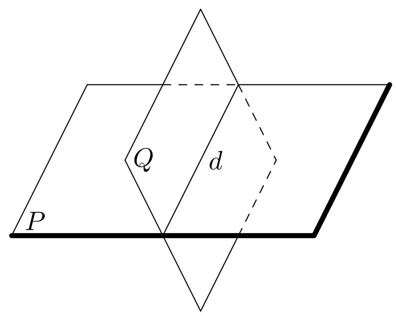
### 3) Intersection de deux plans

On considère deux plans sécants P et Q d'équations cartésiennes respectives :

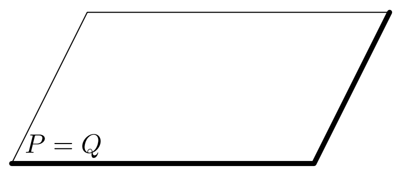
$$P : ax + by + cz + d = 0 \qquad \text{ou} \qquad Q : a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

P et Q sont deux plans de l'espace. Il n'existe que trois possibilités :

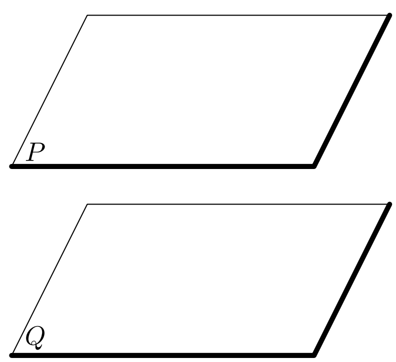
1. les plans ont un point commun et sont distincts, alors ils sont sécants suivant une droite passant par ce point, (ainsi deux plans distincts qui ont deux points communs sont sécants suivant la droite définie par ces deux points)




2. les plans sont confondus,




3. ils n'ont aucun point commun.




Lorsque les deux plans sont sécants, on peut alors récupérer le système de représentation paramétrique de la droite d'intersection en utilisant une des trois coordonnées comme paramètre et en résolvant le système.

**Exercice :**

Donner une représentation paramétrique de la droite $d$ définie, intersection des plans P et Q d'équations respectives :

$$P : 2x + y - z - 2 = 0 \qquad \text{et} \qquad Q : x + 3y + 7z - 11 = 0$$

***Solutions*** :

On peut (même si l'énoncé de l'exercice suggère que la droite $d$ existe) s'assurer que P et Q sont sécants. $\overrightarrow{n}(2;1;-1)$ est un vecteur normal de P et $\overrightarrow{n'}(1;3;7)$ est un vecteur normal de Q, P et Q sont sécants si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires, si c'était le cas, alors on aurait $\vec{n} = k\vec{n}'$, dans ce cas on aurait :

$$2 = k \qquad \text{et} 1 = 3 = k \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

ce qui absude, donc P et Q sont deux plans sécants.
Comme $2x + y - z - 2 = 0 \Longrightarrow y = 2x + z + 2$, ainsi :

$$x + 3(2x + z + 2) + 7z - 11 = 0 \Longleftrightarrow 7x + 10z - 5 = 0 \Longleftrightarrow z = -0,7x + 0,5$$

Et du coup :

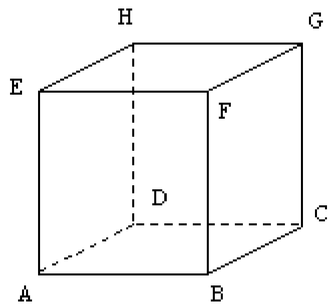
$$y = 2x - 0,7x + 0,5 + 2 = 0,3x + 2$$

En posant $x = t$, on obtient :

$$d : \begin{cases} x = t \\ y = 0,3t + 2 \\ z = -0,7t + 0,5 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

# EXERCICES CORRIGES

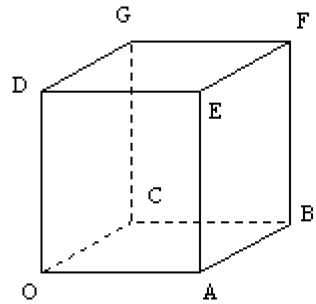
Exercice n°1.




Un cube ABCDEFGH est représenté ci-contre :
Les quadruplets de points suivants déterminent-ils un repère de l'espace ?
Ce repère est-il orthonormal ?

1) a) (D,A,C,H) b) (D,A,B,H)
c) (D,B,F,H) d) (D,C,H,E)
e) (A,B,C,G) f) (A,B,C,F)
g) (A,B,C,H) h) (A,B,C,E)

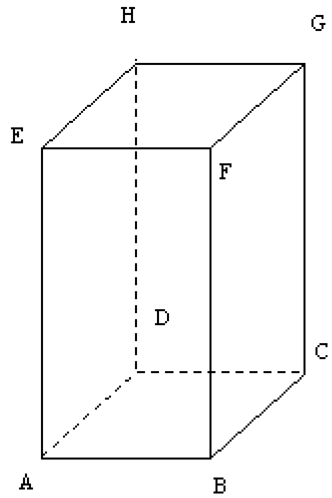
Exercice n°2.




Considérons le cube ci-contre , d'arête égale à 1
On considère le repère $(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OD})$.

1) Donner les coordonnées des sommets du cube.
2) Quelles sont les coordonnées du milieu de [AE]
3) Quelles sont les coordonnées du centre I du carré DEFG ?
4) Quels sont les points de coordonnées respectives $\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$; $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ ?

Exercice n°3.




ABCDEFGH est un pavé droit..
AB=AD=1.
AE=2
I est le milieu de [DH]
Calculez les coordonnées de chacun des huit sommets dans chacun des repères suivants :
1) $(D;\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DH})$
2) $(D;\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DI})$

Exercice n°4.
On considère un repère orthonormal $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OK})$

1) A est le point de coordonnées (1 ;1 ;0).
a) Quelle est la nature du quadrilatère OIAJ ?
b) Calculez OA
2) B est le point de coordonnées (0 ;1 ;1).
c) Quelle est la nature du quadrilatère OJBK ?
d) Calculez OB

Exercice n°5.
Les points A et B ont pour coordonnées respectives (3;5;-2) et (4;-3;1).
1) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2) Calculer les coordonnées du point I, milieu de [AB].

Exercice n°6.
Dans un repère orthornormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, on considère les points A(2,4,-7) et B (-2,1,-1).
Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Exercice n°7.
1) Les vecteurs $\vec{u}\left(3;6;12\right)$ et $\vec{v}\left(2;4;8\right)$ sont ils colinéaires ?
2) Quelles sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ ?
3) Quelles sont les coordonnées du vecteur $2\vec{u}-5\vec{v}$ ?

Exercice n°8.
Soient A(-2 ;1 ;10) ; B(-3 ;1 ;-2) et C le point tel que $\overrightarrow{OC}=5\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$.
Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}=4\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}$.

Exercice n°9.

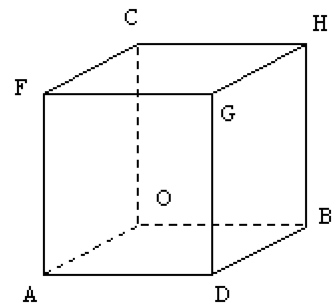
Dans le cube ci-dessous, on considère le repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ tel que

$\overrightarrow{OA}=10\vec{i}$ , $\overrightarrow{OB}=10\vec{j}$ et $\overrightarrow{OC}=10\vec{k}$

Déterminer les coordonnées des points E,F,G,H,L et K définis vectoriellement par

$\overrightarrow{OE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}-\frac{3}{10}\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OK}=\frac{6}{5}\overrightarrow{OG}+\frac{1}{5}\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{AL}=\frac{2}{5}\overrightarrow{DB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OF}$




Exercice n°10.

Dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, on considère les points : A(3;0;0) B(0;5;0) et C(0;0;4). Calculez les coordonnées du point G centre de gravité du triangle ABC.

Exercice n°11.

Dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, on considère les points A(2;1;3) B(4;-1;5) et C(4;2;-7)

1) Montrez que les points A,B et C ne sont pas alignés.
2) Calculez les coordonnées des points :

a) D tel que $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$
b) E est le milieu de [BC]
c) F est le centre de gravité du triangle ABC.
d) G vérifie $3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{CG}$

Exercice n°12.

Soient A(-1 ;-2 ;-3) , B(1 ;1 ;1) et C(3 ;4 ;5). Montrer que les points A,B et C sont alignés.

Exercice n°13.

Soient A(2 ;1 ;5), $B\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$ et C(0 ;-5 ;3). Déterminer les coordonnées du point $D$ pour que $\left(ABCD\right)$ soit un parallélogramme.

Exercice n°14.

Soient $A\left(1;3;\frac{1}{2}\right)$. B(-1 ;4 ;1), C(2 ;3 ;0) et D(1 ;4 ;0). Montrer que les points A,B,C et D sont coplanaires.

Exercice n°15.

Le plan $P$ a pour équation : $x+3y-z+7=0$

1) Donner un vecteur normal à $P$
2) a) Donner les coordonnées d'un point M de $P$.

b) Le point L(1;-1;2) appartient-il au plan $P$ ?

c) Déterminer le réel $z$ pour que le point N(2;5;$z$) appartienne au plan $P$.

Exercice n°16.

Le plan $P$ a pour équation : $2x+y+z=6$

1) Donner un vecteur normal à $P$
2) a) Déterminer les coordonnées du point A, intersection du plan $P$ avec l'axe des abscisses *(Ox)*.

b) Déterminer les coordonnées des points B et C, intersections respectives du plan $P$ avec les axes *(Oy)* et *(Oz)*.

3) Dans un repère de l'espace, placer les points A,B et C. Tracer les droites (AB), (AC) et (BC), traces du plan $P$ sur les plans de coordonnées

Exercice n°17.

Dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, on considère les points A(-3;4;6) B(2;3;1) C(1;3;3) et D(6;2;-2)

1) Calculez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CD}$
2) a) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont ils colinéaires ?

b) Justifiez que les droites (AB) et (CD) sont parallèles

3) On considère l'équation (E) $2x+5y+z=20$ et le point F(1;1;1)
a) Vérifiez que les coordonnées des points A,B,C et D vérifient cette équation.
b) Déterminez les coordonnées de S tels que A,B et S soient alignés et $x_S=7$
c) Déterminez les coordonnées du point P vérifiant l'équation (E) et tel que O,F et P soient alignés.

Exercice n°18.
Déterminer un vecteur normal $\vec{n}$ pour chacun des plans suivants :
$P_1 : -x+y+2z-1=0$ $P_2 : 3x-y=0$ $P_3 : 2y-1=0$ $P_4 : 2x-z+3=0$

Exercice n°19.
Déterminer une équation du plan $P$ passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$
1) A(2;-3;5) et $\vec{n}(3;2;1)$ 2) A(4;-2;1) et $\vec{n}(5;3;2)$ 3) A(1;1;0) et $\vec{n}(0;2;1)$

Exercice n°20.
On considère le plan $P$ d'équation : $2x-3y+6z-18=0$
1) Donner un vecteur normal $\vec{n}$ au plan $P$
2) Déterminer une équation du plan $P'$ parallèle au plan $P$ passant par le point B(6;-4;-4).

Exercice n°21.
On considère les plans $P$ et $P'$ de l'exercice précédent.
Déterminer le point A du plan $P$ tel que $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ soient colinéaires.
En déduire la distance entre les plans parallèles $P$ et $P'$.

Exercice n°22.
Dans chacun des cas suivants, préciser si les plans $P$ et $P'$ sont parallèles :
a) $P$ d'équation $2x+y-z=5$ et $P'$ d'équation $-x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z=7$
b) $P$ d'équation $x+3y-5z=4$ et $P'$ d'équation $-3x-9y+15z=-6$
c) $P$ d'équation $x+3y-2z=8$ et $P'$ d'équation $-4x-12y+8z=-32$

Exercice n°23.
On considère les points A(2;1;1) , B(3;0;2) et C(0;2;1).
On cherche à déterminer une équation du plan (ABC) de la forme $ax+by+cz=d$ , par deux méthodes différentes.
1) a) Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ . Vérifiez que les points A,B et C définissent un plan (ABC).
b) Déterminer un vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ au plan (ABC). (on pourra écrire que $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0$ *et* $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=0$, et choisir a=1)
c) En déduire une équation du plan (ABC)
2) En écrivant que chacun des points A,B et C appartient au plan (ABC), déterminer une équation de ce plan (On sera amené à choisir une valeur pour l'un des nombres *a, b, c* ou *d*.)

Exercice n°24.
Soient les deux plans P et P' d'équations respectives dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

Pour P : (cos $t$) $x$ + (sin $t$) $y-z=0$
Pour P' : (cos $t$) $x$ + (sin $t$) $y+z=0$
où $t$ représente un paramètre réel.
1) P et P' sont-ils perpendiculaires? Justifier.
2) Pour quelles valeurs de $t$ l'axe O$x$ est-il parallèle à P ?
3) Donner un vecteur directeur de la droite intersection des deux plans.
4) Calculer la distance de A(cos $t$, sin $t$, -3) au plan P.

# CORRECTION

Exercice n°1

Le quadruplet (D,A,C,H) détermine un repère orthonormal de l'espace car les vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DH}$ ne sont pas coplanaires et sont même orthogonaux deux à deux

Le quadruplet (D,A,B,H) détermine un repère de l'espace car les vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DH}$ ne sont pas coplanaires. En revanche ce repère n'est pas orthonormal car les vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DB}$ ne sont pas orthogonaux

Le quadruplet (D,B,F,H) ne détermine pas un repère de l'espace car le vecteur $\overrightarrow{DF}$ s'exprime à l'aide de $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DH}$ (en effet $\overrightarrow{DF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DH}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DH}$

Le quadruplet (D,C,H,E) détermine un repère de l'espace car les vecteurs $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{DE}$ ne sont pas coplanaires. En revanche ce repère n'est pas orthonormal car les vecteurs $\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{DE}$ ne sont pas orthogonaux

Le quadruplet (A,B,C,G) détermine un repère de l'espace car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas coplanaires. En revanche ce repère n'est pas orthonormal car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas orthogonaux

Le quadruplet (A,B,C,F) détermine un repère de l'espace car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF}$ ne sont pas coplanaires. En revanche ce repère n'est pas orthonormal car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas orthogonaux

Le quadruplet (A,B,C,H) détermine un repère de l'espace car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AH}$ ne sont pas coplanaires. En revanche ce repère n'est pas orthonormal car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas orthogonaux

Le quadruplet (A,B,C,E) détermine un repère de l'espace car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires. En revanche ce repère n'est pas orthonormal car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas orthogonaux

Exercice n°2

1) Le point O étant l'origine du repère, on aura O(0 ;0 ;0)

Puisque $\overrightarrow{OA}=1\times\overrightarrow{OA}+0\times\overrightarrow{OC}+0\times\overrightarrow{OD}$, on aura A(1 ;0 ;0). Puisque $\overrightarrow{OB}=1\times\overrightarrow{OA}+1\times\overrightarrow{OC}+0\times\overrightarrow{OD}$, on aura B(1 ;1 ;0)

Puisque $\overrightarrow{OC}=0\times\overrightarrow{OA}+1\times\overrightarrow{OC}+0\times\overrightarrow{OD}$, on aura C(0 ;1 ;0). Puisque $\overrightarrow{OD}=0\times\overrightarrow{OA}+0\times\overrightarrow{OC}+1\times\overrightarrow{OD}$, on aura D(0 ;0 ;1)

Puisque $\overrightarrow{OE}=1\times\overrightarrow{OA}+0\times\overrightarrow{OC}+1\times\overrightarrow{OD}$, on aura E(1 ;0 ;1). Puisque $\overrightarrow{OF}=1\times\overrightarrow{OA}+1\times\overrightarrow{OC}+1\times\overrightarrow{OD}$, on aura F(1 ;1 ;1)

Puisque $\overrightarrow{OG}=0\times\overrightarrow{OA}+1\times\overrightarrow{OC}+1\times\overrightarrow{OD}$, on aura G(0 ;1 ;1)

2) Le milieu de [AE]aura pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_E}{2}=1;\frac{y_A+y_E}{2}=0;\frac{z_A+z_E}{2}=\frac{1}{2}\right)$

3) Le centre I du carré DEFG est le milieu de chacune de ses diagonales, donc a pour coordonnées $\left(\frac{x_D+x_F}{2}=\frac{1}{2};\frac{y_D+y_F}{2}=\frac{1}{2};\frac{z_D+z_F}{2}=1\right)$

4) Le point de coordonnées $\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$ est le milieu de [OD]. Le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$ est le milieu de [OB]. Le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ est le milieu de [OF].

Exercice n°3

1) Dans le repère $(D;\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DH})$ : Le point D étant l'origine du repère, on aura D(0 ;0 ;0)

Puisque $\overrightarrow{DA}=1\times\overrightarrow{DA}+0\times\overrightarrow{DC}+0\times\overrightarrow{DH}$, on aura A(1 ;0 ;0). Puisque $\overrightarrow{DB}=1\times\overrightarrow{DA}+1\times\overrightarrow{DC}+0\times\overrightarrow{DH}$, on aura B(1 ;1 ;0)

Puisque $\overrightarrow{DC}=0\times\overrightarrow{DA}+1\times\overrightarrow{DC}+0\times\overrightarrow{DH}$, on aura C(0 ;1 ;0). Puisque $\overrightarrow{DE}=1\times\overrightarrow{DA}+0\times\overrightarrow{DC}+1\times\overrightarrow{DH}$, on aura E(1 ;0 ;1)

Puisque $\overrightarrow{DF}=1\times\overrightarrow{DA}+1\times\overrightarrow{DC}+1\times\overrightarrow{DH}$, on aura F(1 ;1 ;1). Puisque $\overrightarrow{DG}=0\times\overrightarrow{DA}+1\times\overrightarrow{DC}+1\times\overrightarrow{DH}$, on aura G(0 ;1 ;1)

Puisque $\overrightarrow{DH}=0\times\overrightarrow{DA}+0\times\overrightarrow{DC}+1\times\overrightarrow{DH}$, on aura H(0 ;0 ;1)

Dans le repère $(D;\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DI})$ : Le point D étant l'origine du repère, on aura D(0 ;0 ;0)

Puisque $\overrightarrow{DA}=1\times\overrightarrow{DA}+0\times\overrightarrow{DC}+0\times\overrightarrow{DI}$, on aura A(1 ;0 ;0). Puisque $\overrightarrow{DB}=1\times\overrightarrow{DA}+1\times\overrightarrow{DC}+0\times\overrightarrow{DI}$, on aura B(1 ;1 ;0)

Puisque $\overrightarrow{DC}=0\times\overrightarrow{DA}+1\times\overrightarrow{DC}+0\times\overrightarrow{DI}$, on aura C(0 ;1 ;0). Puisque $\overrightarrow{DE}=1\times\overrightarrow{DA}+0\times\overrightarrow{DC}+2\times\overrightarrow{DI}$, on aura E(1 ;0 ;2)

Puisque $\overrightarrow{DF}=1\times\overrightarrow{DA}+1\times\overrightarrow{DC}+2\times\overrightarrow{DI}$, on aura F(1 ;1 ;2). Puisque $\overrightarrow{DG}=0\times\overrightarrow{DA}+1\times\overrightarrow{DC}+2\times\overrightarrow{DI}$, on aura G(0 ;1 ;2)

Puisque $\overrightarrow{DH}=0\times\overrightarrow{DA}+0\times\overrightarrow{DC}+2\times\overrightarrow{DI}$, on aura H(0 ;0 ;2)

Exercice n°4

1) a) Puisque A est le point de coordonnées (1 ;1 ;0), cela signifie que $\overrightarrow{OA}=1\times\overrightarrow{OI}+1\times\overrightarrow{OJ}+0\times\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}$. Le quadrilatère OIAJ est donc un parallélogramme.

b) Dans le repère orthonormal $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OK})$, on a $OA=\sqrt{(x_A-x_O)^2+(y_A-y_O)^2+(z_A-z_O)^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

2) a) Puisque B est le point de coordonnées (0 ;1 ;1), cela signifie que $\overrightarrow{OB}=0\times\overrightarrow{OI}+1\times\overrightarrow{OJ}+1\times\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{OK}$. Le quadrilatère OJBK est donc un parallélogramme.

b) Dans le repère orthonormal $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OK})$, on a $OB=\sqrt{(x_B-x_O)^2+(y_B-y_O)^2+(z_B-z_O)^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

Exercice n°5

1) $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} x_B-x_A=1 \\ y_B-y_A=-8 \\ z_B-z_A=3\end{array}\right.$.

2) Si I est le milieu de [AB], alors $\begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{7}{2} \\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}=1 \\ z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Exercice n°6

$AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2+6^2}=\sqrt{61}$

Exercice n°7

1) Les vecteurs $\vec{u}(3;6;12)$ et $\vec{v}(2;4;8)$ sont colinéaires car $\vec{v}=\dfrac{2}{3}\vec{u}$

2) Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\vec{u}+\vec{v}(5;10;20)$

3) Le vecteur $2\vec{u}$ a pour coordonnées $2\vec{u}(6;12;24)$. Le vecteur $5\vec{v}$ a pour coordonnées $5\vec{v}(10;20;40)$.

En soustrayant les coordonnées des deux vecteurs $2\vec{u}$ et $5\vec{v}$, le vecteur $2\vec{u}-5\vec{v}$ aura donc pour coordonnées $2\vec{u}-5\vec{v}(-4;-8;-16)$

Exercice n°8

Si $\overrightarrow{OC}=5\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$ alors les coordonnées de C sont C(5 ;4 ;-1)

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a donc pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} x_B-x_A=-1 \\ y_B-y_A=0 \\ z_B-z_A=-12\end{array}\right.$ donc $2\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $2\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} -2 \\ 0 \\ -24\end{array}\right.$

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a donc pour coordonnées $\overrightarrow{AC}\left|\begin{array}{l} x_C-x_A=7 \\ y_C-y_A=3 \\ z_C-z_A=-11\end{array}\right.$ donc $4\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $4\overrightarrow{AC}\left|\begin{array}{l} 28 \\ 12 \\ -44\end{array}\right.$

En additionnant les coordonnées des deux précédents vecteurs, le vecteur $\vec{u}=4\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}$ aura donc pour coordonnées

$$\vec{u}=4\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} -2+28=26 \\ 0+12=12 \\ -24+(-44)=-68\end{array}\right.$$

Exercice n°9

Dans le repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, les coordonnées de A sont A(10 ;0 ;0), celles de B(0 ;10 ;0) et celles de C(0 ;0 ;10). Ainsi $\overrightarrow{OA}\left|\begin{array}{l} 10 \\ 0 \\ 0\end{array}\right.$, $\overrightarrow{OB}\left|\begin{array}{l} 0 \\ 10 \\ 0\end{array}\right.$ et $\overrightarrow{OC}\left|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 10\end{array}\right.$

Puisque $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, les coordonnées de $\overrightarrow{OD}$ donc celles de D, sont $\overrightarrow{OD}(10;10;0)$. Ainsi D(10 ;10 ;0)

Le vecteur $\overrightarrow{OE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}-\frac{3}{10}\overrightarrow{OC}$ a donc pour coordonnées $\overrightarrow{OE}\left(\frac{3}{2}\times10=15;\frac{2}{5}\times10=4;-\frac{3}{10}\times10=-3\right)$, donc le point E a pour coordonnées $E(15;4;-3)$

Puisque $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$, les coordonnées de $\overrightarrow{OF}$ donc celles de F, sont $\overrightarrow{OF}(10;0;10)$. Ainsi F(10 ;0 ;10)

Puisque $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, les coordonnées de $\overrightarrow{OG}$ donc celles de G, sont $\overrightarrow{OG}(10;10;10)$. Ainsi G(10 ;10 ;10)

Puisque $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, les coordonnées de $\overrightarrow{OH}$ donc celles de H, sont $\overrightarrow{OH}(0;10;10)$. Ainsi H(0 ;10 ;10)

Puisque $\overrightarrow{OK}=\frac{6}{5}\overrightarrow{OG}+\frac{1}{5}\overrightarrow{OE}$, les coordonnées de $\overrightarrow{OK}$ donc celles de K, sont $\overrightarrow{OK}\left(\frac{6}{5}\times10+\frac{1}{5}\times15=15;\frac{6}{5}\times10+\frac{1}{5}\times4=\frac{64}{5};\frac{6}{5}\times10+\frac{1}{5}\times(-3)=\frac{57}{5}\right)$. Ainsi $K\left(15;\frac{64}{5};\frac{57}{5}\right)$

Notons $L(x;y;z)$. D'une part les coordonnées de $\overrightarrow{AL}$ sont $\overrightarrow{AL}\left|\begin{array}{l}x-x_A=x-10\\ y-y_A=y\\ z-z_A=z\end{array}\right.$. D'autre part, les coordonnées de $\frac{2}{5}\overrightarrow{DB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OF}$ sont $\frac{2}{5}\overrightarrow{DB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OF}\left|\begin{array}{l}\frac{2}{5}\times(x_B-x_D)-\frac{1}{2}\times(x_F-x_O)=\frac{2}{5}\times(-10)-\frac{1}{2}\times10=-9\\ \frac{2}{5}\times(y_B-y_D)-\frac{1}{2}\times(y_F-y_O)=\frac{2}{5}\times0-\frac{1}{2}\times0=0\\ \frac{2}{5}\times(z_B-z_D)-\frac{1}{2}\times(z_F-z_O)=\frac{2}{5}\times0-\frac{1}{2}\times10=-5\end{array}\right.$

De l'égalité $\overrightarrow{AL}=\frac{2}{5}\overrightarrow{DB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OF}$, on déduit $\begin{cases}x-10=-9\\ y=0\\ z=-5\end{cases}$. Le point L a donc pour coordonnées L(1 ;0 ;-5)

Exercice n°10

1ère méthode Le point G centre de gravité du triangle ABC est le barycentre du système $\{(A;1);(B;1);(C;1)\}$. Ainsi

$$\begin{cases}x_G=\dfrac{1\times x_A+1\times x_B+1\times x_C}{1+1+1}=\dfrac{3}{3}=1\\ y_G=\dfrac{1\times y_A+1\times y_B+1\times y_C}{1+1+1}=\dfrac{5}{3}\\ z_G=\dfrac{1\times z_A+1\times z_B+1\times z_C}{1+1+1}=\dfrac{4}{3}\end{cases}$$

2ème méthode : Le point G vérifie l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ où I est le milieu de [BC]

Le point I a pour coordonnées $\left(\frac{x_B+x_C}{2}=0;\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{5}{2};\frac{z_B+z_C}{2}=2\right)$

Le vecteur $\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ a donc pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}(x_I-x_A)=-2;\frac{2}{3}(y_I-y_A)=\frac{5}{3};\frac{2}{3}(z_I-z_A)=\frac{4}{3}\right)$

Notons $G(x;y;z)$. D'une part les coordonnées de $\overrightarrow{AG}$ sont $\overrightarrow{AG}\left|\begin{array}{l}x-x_A=x-3\\ y-y_A=y\\ z-z_A=z\end{array}\right.$.

L'égalité $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ implique $\begin{cases} x-3=-2 \\ y=-\frac{5}{3} \\ z=\frac{4}{3} \end{cases}$. On retrouve bien les corodonnée de $G\left(1;-\frac{5}{3};\frac{4}{3}\right)$

Exercice n°11

1) On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} x_B-x_A=2 \\ y_B-y_A=-2 \\ z_B-z_A=2 \end{vmatrix.$ et $\overrightarrow{AC}\begin{vmatrix} x_C-x_A=2 \\ y_C-y_A=1 \\ z_C-z_A=-10 \end{vmatrix.$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires car il n'existe pas de réel $k$ unique satisfaisant aux trois conditions $\begin{cases} 2k=2 \\ -2k=1 \\ 2k=-10 \end{cases}$. Les points A,B et C ne sont donc pas alignés.

2) a) Notons $D(x;y;z)$. Alors $\overrightarrow{AD}\begin{vmatrix} x_D-x_A=x-2 \\ y_D-y_A=y-1 \\ z_D-z_A=z-3 \end{vmatrix.$ donc $3\overrightarrow{AD}\begin{vmatrix} 3(x_D-x_A)=3x-6 \\ 3(y_D-y_A)=3y-3 \\ 3(z_D-z_A)=3z-9 \end{vmatrix.$. Comme $2\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} 2(x_B-x_A)=4 \\ 2(y_B-y_A)=-4 \\ 2(z_B-z_A)=4 \end{vmatrix.$ et $\overrightarrow{BC}\begin{vmatrix} x_C-x_B=0 \\ y_C-y_B=3 \\ z_C-z_B=-12 \end{vmatrix.$, l'égalité $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ entraîne $\begin{cases} 4+3x-6=0 \\ -4+3y-3=3 \\ 4+3z-9=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{10}{3} \\ z=-\frac{7}{3} \end{cases}$. Ainsi $\boxed{D\left(\frac{2}{3};\frac{10}{3};-\frac{7}{3}\right)}$.

b) Les coordonnées du milieu E de [BC] sont $\left(x_E=\frac{x_B+x_C}{2}=4; y_E=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{1}{2}; z_E=\frac{z_B+z_C}{2}=-1\right)$

c) <u>1ère méthode :</u> Le point F centre de gravité du triangle ABC est le barycentre du système $\{(A;1);(B;1);(C;1)\}$.

Ainsi $\begin{cases} x_F=\frac{1\times x_A+1\times x_B+1\times x_C}{1+1+1}=\frac{10}{3} \\ y_F=\frac{1\times y_A+1\times y_B+1\times y_C}{1+1+1}=\frac{2}{3} \\ z_F=\frac{1\times z_A+1\times z_B+1\times z_C}{1+1+1}=\frac{1}{3} \end{cases}$

<u>2ème méthode :</u> On aurait pu utiliser l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ vérifiée par le point F.

d) Notons $G(x;y;z)$. Alors $\overrightarrow{GA}\begin{vmatrix} x_A-x_G=2-x \\ y_A-y_G=1-y \\ z_A-z_G=3-z \end{vmatrix.$ donc $3\overrightarrow{GA}\begin{vmatrix} 3(x_A-x_G)=6-3x \\ 3(y_A-y_G)=3-3y \\ 3(z_A-z_G)=9-3z \end{vmatrix.$. De plus $\overrightarrow{GB}\begin{vmatrix} x_B-x_G=4-x \\ y_B-y_G=-1-y \\ z_B-z_G=5-z \end{vmatrix.$ donc $2\overrightarrow{GB}\begin{vmatrix} 2(x_B-x_G)=8-2x \\ 2(y_B-y_G)=-2-2y \\ 2(z_B-z_G)=10-2z \end{vmatrix.$. Enfin $\overrightarrow{CG}\begin{vmatrix} x_G-x_C=x-4 \\ y_G-y_C=y-2 \\ z_G-z_C=z+7 \end{vmatrix.$

De l'égalité $3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{CG}$, on déduit $\begin{cases} 6-3x-(8-2x)=x-4 \\ 3-3y-(-2-2y)=y-2 \\ 9-3z-(10-2z)=z+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=2 \\ 2y=7 \\ 2z=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{7}{2} \\ z=-4 \end{cases}$. Ainsi $\boxed{G\left(1;\frac{7}{2};-4\right)}$

Exercice n°12

On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l}x_B-x_A=2\\y_B-y_A=3\\z_B-z_A=4\end{array}\right.$ et $\overrightarrow{AC}\left|\begin{array}{l}x_C-x_A=4\\y_C-y_A=6\\z_C-z_A=8\end{array}\right.$. Puisque $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc les points A,B et C sont alignés.

Exercice n°13

ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l}x_B-x_A=-\frac{3}{2}\\y_B-y_A=-1\\z_B-z_A=-\frac{9}{2}\end{array}\right.$. Si on note $D(x;y;z)$, les coordonnées de $\overrightarrow{DC}$ sont $\overrightarrow{DC}\left|\begin{array}{l}x_C-x=-x\\y_C-y=-5-y\\z_C-z=3-z\end{array}\right.$. L'égalité $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ entraîne donc $\begin{cases}-x=-\frac{3}{2}\\-5-y=-1\\3-z=-\frac{9}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{3}{2}\\y=-4\\z=\frac{15}{2}\end{cases}$.

Les coordonnées de D sont donc $\boxed{D\left(\frac{3}{2};-4;\frac{15}{2}\right)}$

Exercice n°14

On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l}x_B-x_A=-2\\y_B-y_A=1\\z_B-z_A=\frac{1}{2}\end{array}\right.$, $\overrightarrow{AC}\left|\begin{array}{l}x_C-x_A=1\\y_C-y_A=0\\z_C-z_A=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$ et $\overrightarrow{AD}\left|\begin{array}{l}x_D-x_A=0\\y_D-y_A=1\\z_D-z_A=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$

D'après leur coordonnées, on constate que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$, ce qui implique que le point D appartient au plan formé par les trois autres points A,B,C, donc que A,B,C et D sont coplanaires

Exercice n°15

1) Un vecteur normal au plan *P* est le vecteur $\vec{n}(1;3;-1)$

2) a) Un point M de *P* est, par exemple $M(0;0;7)$

b) Le point L(1;-1;2) appartient au plan *P* si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation du plan *P*.
On calcule $x_L+3y_L-z_L+7=1+3\times(-1)-2+7=3\neq 0$. Les coordonnées de L ne vérifiant pas l'équation du plan P, le point L n'appartient pas à P

c) Le point N(2;5;*z*) appartient au plan *P* si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation du plan *P*, donc si et seulement si $x_N+3y_N-z_N+7=0\Leftrightarrow 2+3\times5-z+7=0\Leftrightarrow z=24$. Le point N est donc $\boxed{N(2;5;24)}$

Exercice n°16

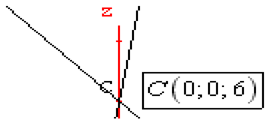
1) Un vecteur normal au plan $P$ est le vecteur $\vec{n}(2;1;1)$

2) Notons $A(x_A;y_A;z_A)$. Si A appartient à l'axe des abscisses $(Ox)$, alors $y_A = z_A = 0$. Si de plus A appartient au plan $P$, ses coordonnées vérifient l'équation de $P$, à savoir $2x_A + y_A + z_A = 6 \Leftrightarrow 2x_A = 6 \Leftrightarrow x_A = 3$. Ainsi $\boxed{A(3;0;0)}$

b) Notons $B(x_B;y_B;z_B)$. Si B appartient à l'axe $(Oy)$, alors $x_B = z_B = 0$. Si de plus B appartient au plan $P$, ses coordonnées vérifient l'équation de $P$, à savoir $2x_B + y_B + z_B = 6 \Leftrightarrow y_B = 6$. Le point B est donc $\boxed{B(0;6;0)}$

c) Notons $C(x_C;y_C;z_C)$. Si C appartient à l'axe $(Oz)$, alors $x_C = y_C = 0$. Si de plus C appartient au plan $P$, ses coordonnées vérifient l'équation de $P$, à savoir $2x_C + y_C + z_C = 6 \Leftrightarrow z_C = 6$. Le point C est donc $\boxed{C(0;0;6)}$

3) figure ci après




Exercice n°17

1) On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} x_B - x_A = 5 \\ y_B - y_A = -1 \\ z_B - z_A = -5 \end{vmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{vmatrix} x_C - x_A = 4 \\ y_C - y_A = -1 \\ z_C - z_A = -3 \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{vmatrix} x_D - x_C = 5 \\ y_D - y_C = -1 \\ z_D - z_C = -5 \end{vmatrix}$

2) a) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires car il n'existe pas de réel $k$ unique satisfaisant aux trois conditions $\begin{cases} 5k = 4 \\ -k = -1 \\ -5k = -3 \end{cases}$

b) A la lecture de leur coordonnées, on constate que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, donc que (AB)//(CD)

3) a) On calcule : $2x_A + 5y_A + z_A = 2\times(-3) + 5\times 4 + 6 = -6 + 20 + 6 = 20$ puis

$2x_B + 5y_B + z_B = 2\times 2 + 5\times 3 + 1 = 4 + 15 + 1 = 20$, $2x_C + 5y_C + z_C = 2\times 1 + 5\times 3 + 3 = 2 + 15 + 3 = 20$

$2x_D + 5y_D + z_D = 2\times 6 + 5\times 2 + (-2) = 12 + 10 - 2 = 20$. Les coordonnées de A,B,C et D vérifient donc cette équation.

b) Si A,B et S sont alignés, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AS}$ sont colinéaires. Il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AS} = t\overrightarrow{AB}$

Notons $S(x;y;z)$. Alors $\overrightarrow{AS}\begin{vmatrix} x_S - x_A = x + 3 \\ y_S - y_A = y - 4 \\ z_S - z_A = z - 6 \end{vmatrix}$, et de l'égalité $\overrightarrow{AS} = t\overrightarrow{AB}$ on déduit $\begin{cases} x + 3 = 5t \\ y - 4 = -t \\ z - 6 = -5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5t - 3 \\ y = -t + 4 \\ z = -5t + 6 \end{cases}$

Mais puisque $x_S = 7$, on aura alors $5t - 3 = 7 \Leftrightarrow t = 2$. Le point S est donc $\boxed{S(7;2;-4)}$

c) Si O,F et P sont alignés, alors les vecteurs $\overrightarrow{OF}$ et $\overrightarrow{OP}$ sont colinéaires.
Il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OF}$. Notons $P(x;y;z)$.

Alors $\overrightarrow{OP}\begin{vmatrix} x_P - x_O = x \\ y_P - y_O = y \\ z_P - z_O = z \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{OF}\begin{vmatrix} x_F - x_O = 1 \\ y_F - y_O = 1 \\ z_F - z_O = 1 \end{vmatrix}$. De l'égalité $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OF}$ on déduit $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

Mais puisque le point P vérifie l'équation de (E) on doit avoir $2t + 5t + t = 20 \Leftrightarrow t = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$. Ainsi $\boxed{P\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)}$

Exercice n°18

Un vecteur normal au plan $P_1$ : $-x+y+2z-1=0$ est le vecteur $\overrightarrow{n_1}(-1;1;2)$

Un vecteur normal au plan $P_2$ : $3x-y=0$ est le vecteur $\overrightarrow{n_2}(3;-1;0)$

Un vecteur normal au plan $P_3$ : $2y-1=0$ est le vecteur $\overrightarrow{n_3}(0;2;0)$

Un vecteur normal au plan $P_4$ : $2x-z+3=0$ est le vecteur $\overrightarrow{n_4}(2;0;-1)$

Exercice n°19

1) Si $\vec{n}(3;2;1)$ est un vecteur normal au plan $P_1$, celui-ci a une équation de la forme $P_1$ : $3x+2y+z+d=0$

On utilise les coordonnées du point A(2;-3;5) pour déterminer $d$. $3x_A+2y_A+z_A+d=0 \Leftrightarrow d=-3x_A-2y_A-z_A$, c'est-à-dire $d=-3\times 2-2\times(-3)-5=-5$. L'équation de $P_1$ est donc $\boxed{P_1\ :\ 3x+2y+z-5=0}$

2) Si $\vec{n}(5;3;2)$ est un vecteur normal au plan $P_2$, celui-ci a une équation de la forme $P_2$ : $5x+3y+2z+d=0$

On utilise les coordonnées du point A(4;-2;1) pour déterminer $d$. $5x_A+3y_A+2z_A+d=0 \Leftrightarrow d=-5x_A-3y_A-2z_A$, c'est-à-dire $d=-5\times 4-3\times(-2)-2\times 1=-16$. L'équation de $P_2$ est donc $\boxed{P_2\ :\ 5x+3y+2z-16=0}$

3) Si $\vec{n}(0;2;1)$ est un vecteur normal au plan $P_3$, celui-ci a une équation de la forme $P_3$ : $2y+z+d=0$

On utilise les coordonnées du point A(1;1;0) pour déterminer $d$. $2y_A+z_A+d=0 \Leftrightarrow d=-2y_A-z_A$, c'est-à-dire $d=-2\times 1-0=-2$. L'équation de $P_3$ est donc $\boxed{P_3\ :\ 2y+z-2=0}$

Exercice n°20

1) Un vecteur normal au plan $P$ d'équation : $2x-3y+6z-18=0$ est $\vec{n}(2;-3;6)$

2) Si le plan $P'$ est parallèle au plan $P$, alors $\vec{n}(2;-3;6)$ est aussi un vecteur normal à $P'$ qui aura donc une équation de la forme $2x-3y+6z+d=0$. On détermine $d$ grâce aux coordonnées du point B(6 ;-4 ;-4) :

$2x_B-3y_B+6z_B+d=0 \Leftrightarrow d=-2x_B+3y_B-6z_B=0$. L'équation de $P'$ est donc $\boxed{2x-3y+6z=0}$

Exercice n°21

Notons $A(x;y;z)$. Si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB}=t\vec{n}$

On calcule $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} x_B-x_A=6-x \\ y_B-y_A=-4-y \\ z_B-z_A=-4-z \end{array}\right.$ et $t\vec{n}\left|\begin{array}{l} 2t \\ -3t \\ 6t \end{array}\right.$. De l'égalité $\overrightarrow{AB}=t\vec{n}$, on déduit $\begin{cases} 6-x=2t \\ -4-y=-3t \\ -4-z=6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6-2t \\ y=3t-4 \\ z=-4-6t \end{cases}$

Mais si A est un point du plan $P$, ses coordonnées vérifient l'équation de $P$, à savoir $2x_A-3y_A+6z_A-18=0$ ,donc

$$2(6-2t)-3(3t-4)+6(-4-6t)-18=0 \Leftrightarrow -49t=18 \Leftrightarrow t=-\frac{18}{49}$$

Le point A est donc $\begin{cases} x=6-2\times\left(-\frac{18}{49}\right)=\frac{330}{49} \\ y=3\times\left(-\frac{18}{49}\right)-4=-\frac{250}{49} \\ z=-4-6\times\left(-\frac{18}{49}\right)=-\frac{88}{49} \end{cases}$

La distance entre les plans parallèles $P$ et $P'$ est donnée par

$$AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$
$$=\sqrt{\left(6-\frac{330}{49}\right)^2+\left(-4+\frac{250}{49}\right)^2+\left(-4+\frac{88}{49}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{1296}{2401}+\frac{2916}{2401}+\frac{11664}{2401}}=\sqrt{\frac{15876}{2401}}=\sqrt{\frac{324}{49}}=\boxed{\frac{18}{7}}$$

Exercice n°22

1) Un vecteur normal du plan $P$ d'équation $2x+y-z=5$ est $\vec{n}_1(2;1;-1)$. Un vecteur normal du plan $P'$ d'équation $-x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z=7$ est $\vec{n}_2\left(-1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$. Les vecteurs $\vec{n}_1(2;1;-1)$ et $\vec{n}_2\left(-1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ n'étant pas colinéaires (il n'existe pas de réel $k$ unique satisfaisant à la fois $\begin{cases}2k=-1\\ 1\times k=\frac{1}{2}\\ (-1)\times k=-\frac{1}{2}\end{cases}$), les deux plans $P$ et $P'$ ne sont pas parallèles

2) Un vecteur normal du plan $P$ d'équation $x+3y-5z=4$ est $\vec{n}_1(1;3;-5)$. Un vecteur normal du plan $P'$ d'équation $-3x-9y+15z=-6$ est $\vec{n}_2(-3;-9;15)$. Puisque $\vec{n}_2=-3\vec{n}_1$, les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires, donc les deux plans $P$ et $P'$ sont parallèles.

3) Un vecteur normal du plan $P$ d'équation $x+3y-2z=8$ est $\vec{n}_1(1;3;-2)$. Un vecteur normal du plan $P'$ d'équation $-4x-12y+8z=-32$ est $\vec{n}_2(-4;-12;8)$. Puisque $\vec{n}_2=-4\vec{n}_1$, les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires, donc les deux plans $P$ et $P'$ sont parallèles

Exercice n°23

1) On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}x_B-x_A=1\\ y_B-y_A=-1\\ z_B-z_A=1\end{matrix}\right.$ , $\overrightarrow{AC}\left|\begin{matrix}x_C-x_A=-2\\ y_C-y_A=1\\ z_C-z_A=0\end{matrix}\right.$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires car il n'existe pas de réel $k$ unique satisfaisant aux trois conditions $\begin{cases}k=-2\\ -k=1\\ k=0\end{cases}$. Les points A,B et C ne sont donc pas alignés, donc définissent un plan (ABC).

b) Notons $\vec{n}\left|\begin{matrix}a\\ b\\ c\end{matrix}\right.$ les coordonnées d'un vecteur normal à (ABC)

Puisque $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0$, on a $1\times a+(-1)\times b+1\times c=0 \Leftrightarrow a-b+c=0$

Puisque $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=0$, on a $(-2)\times a+1\times b+0\times c=0 \Leftrightarrow -2a+b=0$

Le système $\begin{cases}a-b+c=0\\ -2a+b=0\end{cases}$ de deux équations à trois inconnues admettant une infinité de solutions, on doit « fixer arbitrairement » une valeur pour l'une quelconque des inconnues. L'énoncé nous conseille de choisir $a$=1

Le système devient alors $\begin{cases} a=1 \\ 1-b+c=0 \\ -2+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ c=b-1=1 \\ b=2 \end{cases}$. Un vecteur normal à (ABC) est donc $\vec{n}\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$.

c) Une équation du plan (ABC) est alors $x+2y+z+d=0$. On détermine $d$ en utilisant les coordonnées de l'un des points de ce plan, par exemple A(2 ;1 ;1). On obtient $x_A+2y_A+z_A+d=0 \Leftrightarrow d=-x_A-2y_A-z_A=-2-2-1=-5$

Une équation du plan (ABC) est alors $\boxed{x+2y+z-5=0}$.

2) Une équation de (ABC) étant de la forme $ax+by+cz=d$ , les coordonnées de A,B et C vériant cette équation de plan, nous permettent de dresser le système de trois équations à 4 inconnues :

$$\begin{cases} ax_A+by_A+cz_A+d=0 \\ ax_B+by_B+cz_B+d=0 \\ ax_C+by_C+cz_C+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b+c+d=0 \\ 3a+2c+d=0 \\ 2b+c+d=0 \end{cases}$$

Ce système admettant une infinité de solutions, on doit « fixer arbitrairement » une valeur pour l'une quelconque des inconnues. On fixe par exemple $a$ = 1 Le système devient :

$$\begin{cases} b+c+d=-2 & L_1 \\ 2c+d=-3 & L_2 \\ 2b+c+d=0 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c+d=-2 & L_1 \\ 2c+d=-3 & L_2 \\ -c-d=4 & L_4=L_3-2L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c+d=-2 & L_1 \\ 2c+d=-3 & L_2 \\ c=1 & L_4+L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2-c-d=2 & L_1 \\ d=-3-2c=-5 & L_2 \\ c=1 & L_4+L_2 \end{cases}$$

On retrouve alors l'équation $\boxed{x+2y+z-5=0}$

Exercice n°24

1) P et P' admettent pour vecteurs normaux les vecteurs $\vec{n_1}\left(\cos t;\sin t;-1\right)$ et $\vec{n_2}\left(\cos t;\sin t;+1\right)$.

Le produit scalaire $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=(\cos t)(\cos t)+(\sin t)(\sin t)+(-1)(1)=(\cos t)^2+(\sin t)^2-1=1-1=0$ nous permet d'affirmer que les plans P et P' sont perpendiculaires.

2) l'axe O$x$ est parallèle à P pour toutes les valeurs de $t$ pour lesquelles $\vec{n_1}\left(\cos t;\sin t;-1\right)$, vecteur normal à P sera orthogonal à tout vecteur directeur de l'axe O$x$.

Un vecteur directeur de l'axe O$x$ est $\vec{u}(1;0;0)$. Le produit scalaire $\vec{n_1}\cdot\vec{u}=(\cos t)\times 1+(\sin t)\times 0+(-1)(0)=\cos t$. Pour $t=\frac{\pi}{2}[\pi]$, $\vec{n_1}\cdot\vec{u}=\cos t=0$, donc l'axe O$x$ est parallèle à P.

3) Les coordonnées des points de la droite intersection des deux plans vérifient le système $\begin{cases} (\cos t)x+(\sin t)y-z=0 \\ (\cos t)x+(\sin t)y+z=0 \end{cases}$, soit, par soustraction des deux lignes, $\begin{cases} (\cos t)x+(\sin t)y+z=0 \\ 2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos t)x+(\sin t)y=0 \\ z=0 \end{cases}$.

Si $t=\frac{\pi}{2}[\pi]$, puisque $\cos t=0$ et $\sin t=1$, le système est équivalent à $\begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}, \lambda\in\mathbb{R}$. Un vecteur directeur de la droite intersection des deux plans est $\vec{v}(1;0;0)$

Si $t\neq\frac{\pi}{2}[\pi]$, $\begin{cases} (\cos t)x+(\sin t)y=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\lambda\tan t \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}, \lambda\in\mathbb{R}$ Un vecteur directeur de la droite intersection des deux plans est $\vec{v}\left(-\tan(t);1;0\right)$

4) La distance de A(cos $t$, sin $t$, -3) au plan P vaut $\dfrac{\left|(\cos t)(\cos t)+(\sin t)(\sin t)+3\right|}{\sqrt{(\cos t)^2+(\sin t)^2+(-1)^2}}=\dfrac{|1+3|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

# *Références*

## المراجع باللغة العربية


← كتاب الرياضيات- الهندسة - للسنة الثانية الثانوية شعبة العلوم التجريبية طبعة 1425- 2004

← كتاب الرياضيات- الهندسة - للسنة الثانية الثانوية شعبة العلوم الرياضية طبعة 1995/814

← دلتا باك 2002 السنة الثانية علوم تجريبية طبعة 1422 – 2002


## المراجع باللغة الفرنسية


- 1ere S collection hyperbole Edition 2005, conformes au nouveau Bac
- Mathématiques Première S-E ANALYSE EDITIONS MAGHARD N° Editeur : 8773-dépot légal : juillet 1991


## Les sites web


- http://www.wicky-math.fr.nf/
- http://xymaths.free.fr/Lycee/1S/Docs/Cours-Angles-Orientes-Produit-Scalaire.pdf
- http://www.lyceedadultes.fr/sitepedagogique/pages/math1S.html
- http://www.yann-angeli.fr/enseignement/premiere-s/premiere-s-1-2010-2011/
- http://www.nathan.fr/webapps/cpg2-5/default.asp?idcpg=1375&idtype=2744
- http://dominique.frin.free.fr/terminales/exos-terminaleS.htm
- http://jgaltier.free.fr/Premiere_S/sujets.htm
- http://www.ac-grenoble.fr/lycee/vincent.indy/
- http://www.mathematiques-web.fr/
- http://chingatome.net/math/exercices/corriges/1S
- http://xmaths.free.fr/
- http://lamerci-maths-2nde.jimdo.com/
- http://www.hexomaths.fr/index.htm
- http://www.normalesup.org/~glafon/eiffel.html
- http://exo7.emath.fr/index.html
- http://mathematiques.daval.free.fr/